

Федеральное агентство связи

Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение
высшего профессионального образования
Сибирский государственный университет
телекоммуникаций и информатики
(ФГОБУ ВПО «СибГУТИ»)

В.П. БАКАЛОВ
Ю.В. РЯСНЫЙ
Н.М. ГУСЕЛЬНИКОВА
Е.В. ДЕЖИНА

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Курс лекций

Учебное пособие

Новосибирск 2013

УДК 621.373

Бакалов В.П., Рясный Ю.В., Гусельникова Н.М., Дежина Е.В. **Теория электрических цепей.** Учебное пособие/ФГОБУ ВПО СибГУТИ. – Новосибирск, 2013. – 279 стр.

Курс лекций является раздаточным материалом при проведении практических и лабораторных занятий студентами всех форм обучения, и предназначен для лучшего усвоения материала изучаемой темы, поскольку в нем в сжатой форме, но достаточно глубоко и подробно, изложен весь материал в соответствии с программой курса «Теория электрических цепей».

Кафедра теории электрических цепей

Ил. – 251, список лит. – 15 наим.

Рецензенты: д.т.н., профессор Петров В.П. (СибГУТИ)
д.т.н., профессор Пальчун Ю.Н. (СНИИМ)

Утверждено редакционно-издательским советом СибГУТИ в качестве учебного пособия.

© ФГОБУ ВПО Сибирский государственный университет
телекоммуникаций и информатики, 2013

Оглавление

ТЕМА 1. Основные понятия и законы теории электрических цепей	6
Лекция 1. Основные понятия теории электрических цепей	6
Лекция 2. Основные законы, теоремы и принципы ТЭЦ	13
ТЕМА 2. Линейные электрические цепи в режиме постоянного тока	21
Лекция 3. Методы анализа и расчета линейных электрических цепей	21
ТЕМА 3. Линейные электрические цепи в режиме гармонических колебаний	32
Лекция 4. Основные понятия. Законы Ома и Кирхгофа для мгновенных значений и комплексных амплитуд тока и напряжения	32
Лекция 5. Методы анализа цепей при воздействии гармонических колебаний	39
Лекция 6. Электрические цепи с индуктивными связями	45
ТЕМА 4. Комплексные передаточные функции и частотные характеристики линейных электрических цепей	56
Лекция 7. Комплексные передаточные функции. Резонансные цепи. Последовательный колебательный контур	56
Лекция 8. Влияние сопротивления источника сигнала и сопротивления нагрузки на параметры последовательного контура. Параллельный колебательный контур, его характеристики и параметры	63
ТЕМА 5. Переходные процессы в линейных электрических цепях	72
Лекция 9. Понятие переходного процесса. Законы коммутации. Независимые и зависимые начальные условия. Классификация методов анализа переходных процессов. Классический метод анализа	72
Лекция 10. Переходные процессы в линейных электрических цепях второго порядка	79
ТЕМА 6. Операторный метод анализа переходных процессов	88
Лекция 11. Преобразование Лапласа. Основные теоремы и свойства	88
Лекция 12. Операторный метод анализа переходных процессов в цепях первого порядка	94
ТЕМА 7. Временные методы анализа переходных процессов	101
Лекция 13. Переходная и импульсная характеристики электрических цепей. Метод интеграла Дюамеля, метод интеграла наложения (свертки)	101
ТЕМА 8. Частотный (спектральный) метод анализа переходных процессов в линейных электрических цепях	114
Лекция 14. Ряды Фурье. Теорема Парсеваля. Преобразование Фурье. Спектральный метод анализа цепей	114
Лекция 15. Спектры сигналов. Частотный метод анализа	121
ТЕМА 9. Дискретные сигналы и дискретные цепи	128
Лекция 16. Дискретные сигналы и их спектры. Z-преобразование дискретных сигналов	128
Лекция 17. Дискретные цепи	135
ТЕМА 10. Четырехполюсники	149
Лекция 18. Классификация четырехполюсников. Параметры четырехполюсников и их свойства. Уравнения передачи четырехполюсников	149

ТЕМА 11. Нелинейные электрические цепи в режиме постоянного тока	156
Лекция 19. Двухполюсные нелинейные элементы. Методы анализа цепей с двухполюсными нелинейными элементами	156
Лекция 20. Аналитическое представление ВАХ нелинейных элементов. Решение задачи аппроксимации	163
ТЕМА 12. Нелинейные электрические цепи при гармоническом воздействии	169
Лекция 21. Воздействие гармонических колебаний на нелинейный резистивный элемент (НРЭ)	169
Лекция 22. Преобразование частоты гармонического колебания	174
ТЕМА 13. Электрические цепи с зависимыми источниками тока и напряжения	180
Лекция 23. Зависимые источники тока и напряжения	180
ТЕМА 14. Электрические цепи с обратными связями	190
Лекция 24. Классификация обратных связей. Передаточная функция электрической цепи с обратной связью. Определение вида обратной связи ..	190
ТЕМА 15. Автоколебательные цепи	197
Лекция 25. Физические процессы в автоколебательных цепях. LC-генератор с трансформаторной обратной связью	197
Лекция 26. Обобщенная трехточечная схема генератора. RC-генераторы с лестничной обратной связью	205
ТЕМА 16. Линейные двухполюсники	212
Лекция 27. Общие сведения, определения, классификация двухполюсников	212
Лекция 28. Синтез реактивных двухполюсников по входным функциям	220
ТЕМА 17. Электрические фильтры	226
Лекция 29. Классификация фильтров. Краткое описание характеристик фильтра. Основные этапы синтеза фильтров. Условия физической реализуемости квадрата модуля передаточной функции	226
Лекция 30. Решение задачи аппроксимации квадрата АЧХ фильтра (поиск функции $ H(j\omega) ^2$)	233
Лекция 31. Определение передаточной функции $H(p)$ фильтра нижних частот с характеристикой Чебышева по найденному квадрату модуля АЧХ $ H(j\Omega) ^2$	240
Лекция 32. Синтез фильтра верхних частот (ФВЧ), полосового фильтра (ПФ) и режекторного фильтра (РФ)	249
ТЕМА 18. Корректирующие электрические цепи и их синтез	257
Лекция 33. Линейные амплитудно-частотные и фазо-частотные искажения в электрических цепях. Амплитудные и фазовые корректоры	257
ТЕМА 19. Линейные электрические цепи с распределенными параметрами .	265
Лекция 34. Однородная длинная линия. Телеграфные и волновые уравнения длинной линии. Параметры линии и волны	265
Список используемых источников	278

Предисловие

Курс лекций по ТЭЦ соответствует типовой программе, составлен на основе известного теоретического и практического материала, широко представленного в учебниках и учебных пособиях, указанных в списке используемых источников.

Цель написания курса лекций по ТЭЦ состоит в том, чтобы значительно облегчить усвоение студентами обширного и, подчас, довольно трудного материала. В соответствии с поставленной целью курс лекций может служить в качестве раздаточного материала во время практических и лабораторных занятий, тематика которых гармонично связана с материалом лекций.

При написании курса лекций предполагалось, что студенты знакомы с основами математического анализа, линейной алгебры, алгебры комплексных чисел, а также с основными понятиями теории электромагнитного поля, излагаемыми в курсе физики. Материал учебного пособия разделен на темы, содержание которых раскрывается в лекциях. Первая тема посвящена основным понятиям, принципам, теоремам и законам теории электрических цепей, на которые делается ссылка при изложении последующих тем.

При изложении материала использован единый принцип: сначала ставится цель анализа (или исследования), а потом приводится анализ по алгоритму. Данный прием позволил структурировать материал и в очень сжатой форме изложить сущность рассматриваемых вопросов. Для лучшего понимания и усвоения излагаемого материала приведены многочисленные примеры, раскрывающие основные теоретические положения и идеи, а также приведены задачи для самостоятельного решения.

ТЕМА 1. Основные понятия и законы теории цепей

Лекция 1

Основные понятия теории электрических цепей

Электрическая цепь – совокупность устройств, предназначенных для прохождения электрического тока и описываемых с помощью понятий тока и напряжения. Электрическая цепь состоит из источников и приемников электрической энергии.

Источники электрической энергии – устройства, создающие токи и напряжения.

Приемники электрической энергии – устройства, потребляющие (запасяющие) электрическую энергию или преобразующие электрическую энергию в другие виды энергии.

Физические элементы электрических цепей – резисторы, катушки индуктивности, транзисторы, конденсаторы, лампы и другие компоненты электроники.

Электрический ток. Различают: *мгновенное значение тока*

$$i(t) = \frac{dq}{dt}, \quad (1.1)$$

где q – заряд; t – время; действующее (I) и амплитудное (I_m) значения тока.

Единица измерения тока: ампер (А), размерность [А].

Единица измерения заряда: кулон (Кл), размерность [А·с].

Принято считать значение тока $i(t)$ положительным (+), если направление тока совпадает с заранее выбранным отсчетом тока (направлением) и отрицательным – в противном случае.

Электрическое напряжение между двумя точками электрической цепи определяется количеством энергии, затрачиваемой на перемещение единичного заряда от одной точки цепи к другой

$$u(t) = \frac{dW}{dq}, \quad (1.2)$$

где W – энергия электрического поля.

Единица измерения напряжения: вольт (В), размерность [В].

Единица измерения энергии: джоуль (Дж), размерность [А·В·с].

Энергия определяется по формуле

$$W = \int_0^q u(t) dq = \int_{-\infty}^t u(t) \cdot i(t) dt. \quad (1.3)$$

Напряжение потенциального электрического поля равно

$$U_{a\bar{b}} = V_a - V_{\bar{b}}, \quad (1.4)$$

где V_a и V_b – потенциалы точек a и b .

Мгновенная мощность $p(t)$ – производная энергии по времени

$$p(t) = dW/dt = u(t) \cdot i(t). \quad (1.5)$$

Единица измерения мощности: Ватт (Вт), размерность [В·А].

Знак мощности определяется знаками тока и напряжения в элементе электрической цепи; если знаки одинаковые, то $p(t) > 0$ – мощность потребляется участком цепи; если знаки разные, то $p(t) < 0$ – мощность отдается участком электрической цепи.

Пассивные элементы электрической цепи

Резистивное сопротивление R – идеализированный элемент, обладающий свойством преобразовывать (рассеивать) электрическую энергию в тепловую энергию. Условное обозначение резистивного сопротивления в схеме приведено на рис.1.1.

Единица измерения сопротивления R : Ом (Ом), размерность [В/А], единица измерения проводимости G : сименс (См), размерность [А/В].

Математическая модель (закон Ома)

$$i = u/R \text{ или } i = Gu. \quad (1.6)$$

Вольт-амперная характеристика (ВАХ) резистора – зависимость тока от напряжения (рис. 1.2). Эта зависимость может быть линейной или нелинейной.

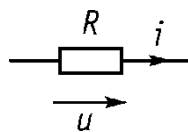


Рис. 1.1

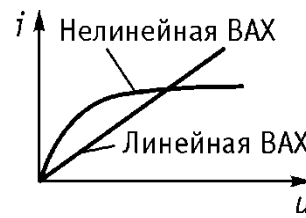


Рис. 1.2

Мгновенная мощность в резистивном элементе

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = i^2(t) \cdot R = u^2(t) \cdot G \quad (p(t) > 0). \quad (1.7)$$

Индуктивный элемент L – идеализированный элемент, обладающий свойством накапливать энергию магнитного поля.

Единица измерения индуктивности: генри (Гн), размерность [В·с/А]. Условное обозначение в схеме приведено на рис. 1.3.

Математическая модель индуктивного элемента

$$\psi = L \cdot i, \quad (1.8)$$

где ψ – потокосцепление (единицы измерения (Вб), размерность [В·с]).

Вебер-амперная характеристика – зависимость потокосцепления от тока (рис. 1.4). Эта зависимость линейна, если L не зависит от протекающего в индуктивном элементе тока, и нелинейная, если L – зависит от тока.

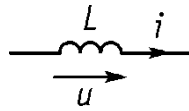


Рис. 1.3

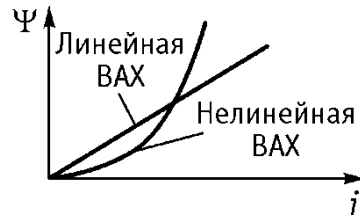


Рис. 1.4

Формулы, связывающие ток и напряжение на индуктивном элементе

$$u(t) = \frac{d\Psi}{dt} = L \frac{di(t)}{dt}, \quad i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(t) dt. \quad (1.9)$$

Для постоянного тока индуктивный элемент есть идеальный проводник.

Мгновенная мощность в индуктивном элементе

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = L \cdot i(t) \cdot \frac{di(t)}{dt}, \quad (1.10)$$

причем $p(t) > 0$ при совпадении направлений тока и напряжения (мощность потребляется) и $p(t) < 0$ - в противном случае (мощность отдается).

Запасаемая в индуктивности энергия

$$W_L(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = \frac{Li^2}{2}. \quad (1.11)$$

Емкостной элемент C – идеализированный элемент электрической цепи, обладающий свойством накапливать энергию электрического поля. Условное обозначение в схеме приведено на рис. 1.5.

Математическая модель емкостного элемента

$$q = Ci. \quad (1.12)$$

Единица измерения емкости C : фарада (Ф), размерность $[A \cdot c/V]$.

Кулон-вольтная характеристика – зависимость накапливаемого в емкости заряда от напряжения на емкостном элементе. Если емкость не зависит от приложенного напряжения, то кулон-вольтная характеристика линейная, в противном случае – нелинейная (рис. 1.6).

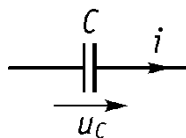


Рис. 1.5

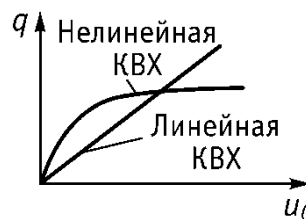


Рис. 1.6

Формулы, связывающие ток, протекающий через емкостной элемент, и напряжением на нем, имеют вид

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}, \quad u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt. \quad (1.13)$$

Для постоянного тока емкостной элемент эквивалентен разрыву цепи (сопротивление емкостного элемента равно бесконечности).

Мгновенная мощность в емкостном элементе равна

$$p(t) = u_C(t) \cdot i(t) = C \cdot u_C(t) \frac{du_C(t)}{dt}, \quad (1.14)$$

причем мгновенная мощность может быть больше или меньше нуля.

Энергия электрического поля, запасенная в емкостном элементе, равна

$$W_C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = \frac{Cu^2}{2}. \quad (1.15)$$

Активные элементы электрической цепи

Активные элементы электрической цепи – это зависимые и независимые источники электрической энергии.

Независимые источники – аккумуляторы, термоэлементы и др. представляются в виде двух моделей: источника напряжения и источника тока.

Независимый источник напряжения – идеализированный двухполюсный элемент, напряжение на зажимах которого, не зависит от тока, протекающего через него.

Условное обозначение в схеме для идеального источника напряжения (внутреннее сопротивление $R_r = 0$) приведено на рис. 1.7 а, реального источника напряжения (внутреннее сопротивление $R_r \neq 0$) приведено на рис. 1.7 б.

Вольт-амперная характеристика источника напряжения – зависимость напряжения источника напряжения от протекающего тока (рис. 1.8).

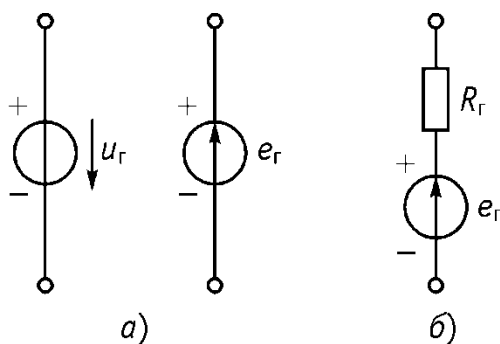


Рис. 1.7



Рис. 1.8

Независимый источник тока – идеализированный двухполюсный элемент, ток которого не зависит от напряжения на его зажимах.

Условное обозначение идеального источника тока ($R_r = \infty$) приведено на рис. 1.9 а, реального источника тока приведено на рис. 1.9 б.

Ампер-вольтная характеристика источника тока – зависимость тока источника тока от напряжения на его зажимах (рис. 1.10).

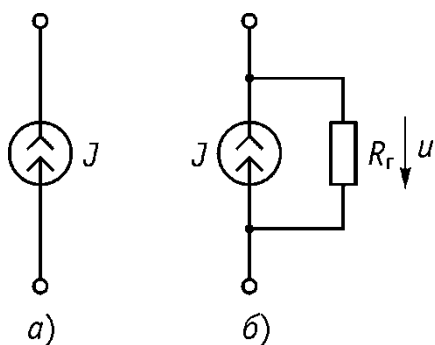


Рис. 1.9

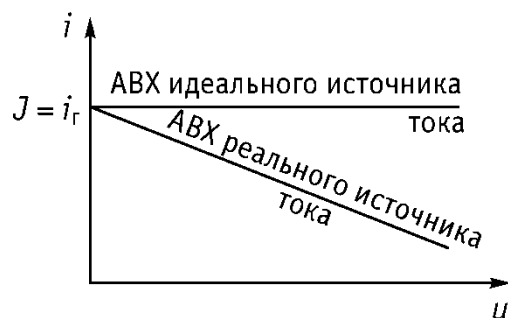


Рис. 1.10

Электрическая схема – графическое изображение электрической цепи.

Топология электрической цепи – представление электрической схемы с помощью графа цепи.

Простой узел – место соединения двух элементов цепи (рис. 1.11 а).

Сложный узел – место соединения зажимов трех и более элементов цепи (рис 1.11 б). **Ветвь** – часть цепи, включенной между двумя узлами, через которые эта часть цепи обменивается энергией с остальной цепью.

Параллельное соединение ветвей – соединение ветвей к одной паре узлов (рис. 1.11 в).

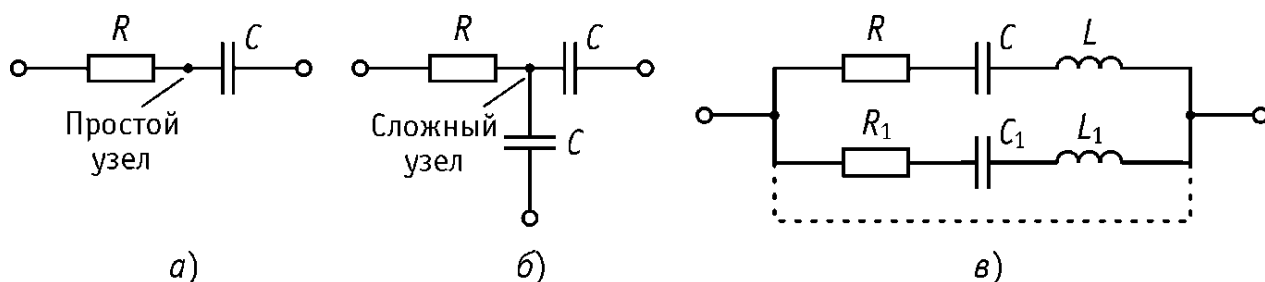


Рис. 1.11

Простой путь – последовательное соединение ветвей, связывающих два заданных узла.

Контур – замкнутый путь.

Пусть имеется схема (рис. 1.12 а). Ориентированный граф схемы изображен на рис. 1.12 б. Из узла 1 в узел 3 можно попасть по простым путям, образованным ветвями: 3-5; 3-4. Ветви 1, 3, 5 и 6 образуют один из контуров.

Подграф – часть графа (рис. 1.13 а).

Связный подграф – подграф, у которого любые его два узла связаны, т.е. соединены ветвями (рис. 1.13 а).

Дерево графа – связный подграф, содержащий все узлы, но не содержащий ни одного контура (рис. 1.13 б).

Ребра – ветви дерева.

Дополнение дерева – совокупность ветвей, не входящих в состав дерева (рис. 1.13 в).

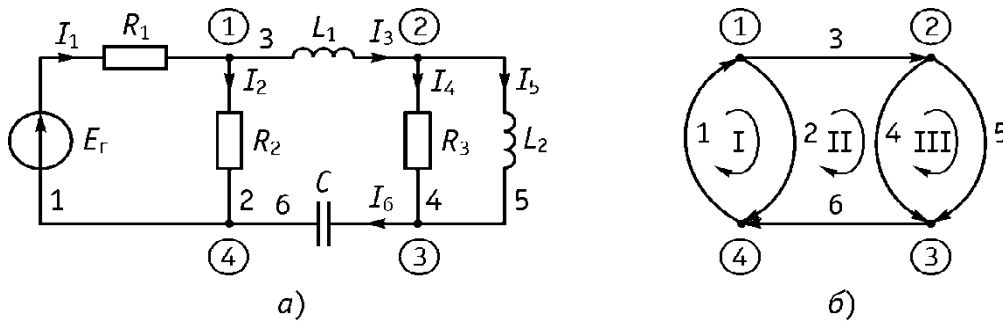


Рис. 1.12

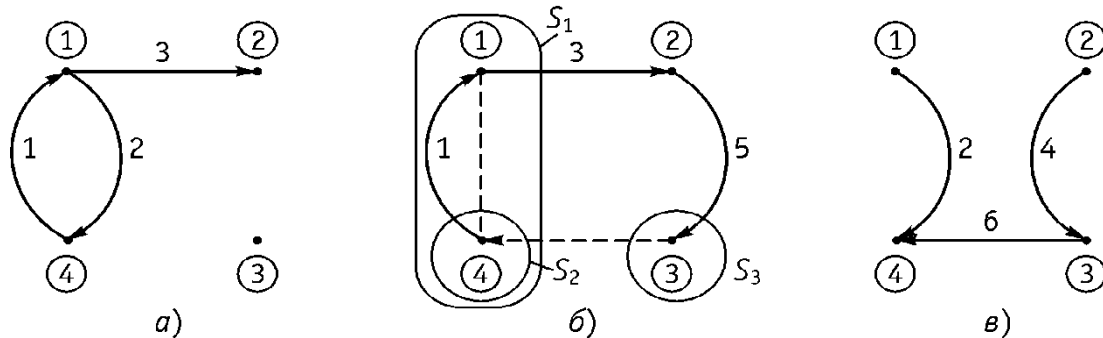


Рис. 1.13

Хорды – ветви дополнения.

Сечение графа – минимальное множество ветвей, удаление которых разделяет граф на две несвязанные части. Добавление любой ветви делает граф связным.

Главное сечение графа – сечение дерева, рассекающее только одну ветвь дерева. Каждому дереву соответствует своя совокупность главных сечений графа. Число главных сечений равно числу ветвей дерева.

Граф схемы (рис. 1.12 б) можно описать структурной матрицей A

$$A = \begin{matrix} & \text{ветви} \\ \text{узлы} & \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

где «+1» – ветвь выходит из узла, «-1» – ветвь входит в узел;
матрицей C главных сечений S

$$C = \begin{matrix} & \text{ветви} \\ \text{сечения} & \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

где «+1» – ветвь входит в сечение, «-1» – ветвь выходит из сечения;
матрицей контуров B

$$B = \begin{array}{c} \text{контур} \\ \text{ветви} \end{array} \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \text{I} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{II} & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \text{III} & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

где «+1» – направление ветви совпадает с направлением контура, «-1» – направление ветви не совпадает с направлением контура.

Лекция 2

Основные законы, теоремы и принципы ТЭЦ

Закон Ома

а. Для участка пассивной цепи (рис. 1.14 а)

$$I = \frac{U_{ab}}{R_1 + R_2} \text{ или в общем случае } I = U_{ab} / \sum_{k=1}^n R_k, \quad (1.16)$$

где $U_{ab} = V_a - V_b$, V_a и V_b – потенциалы узлов a и b ; n – число последовательно соединенных резистивных сопротивлений.

б. Для участка цепи с источниками ЭДС (рис. 1.14 б)

$$I = \frac{U_{ab} + E_1 - E_2}{R_1 + R_2} \text{ или в общем случае } I = \left(U_{ab} + \sum_{j=1}^m E_j \right) / \sum_{k=1}^n R_k, \quad (1.17)$$

где m – число последовательно соединенных источников; $\sum_{j=1}^m E_j$ – алгебраическая сумма.

В алгебраической сумме ЭДС берется со знаком «+», если направление источника E совпадает с направлением тока и «–» в противоположном случае.

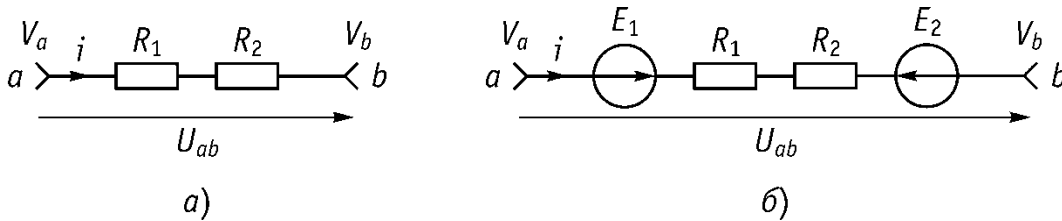


Рис. 1.14

Законы Кирхгофа

1-й закон – **закон токов Кирхгофа** (ЗТК): алгебраическая сумма токов ветвей, сходящихся в любом j -м узле равна нулю

$$\sum_{k=1}^m i_k^{(j)} = 0, \quad (1.18)$$

где m – число ветвей, входящих в узел j .

2-й закон – **закон напряжений Кирхгофа** (ЗНК): алгебраическая сумма напряжений ветвей в любом j -ом контуре равна нулю

$$\sum_{k=1}^n u_k^{(j)} = 0, \quad (1.19)$$

где n – число ветвей, входящих в контур j .

Замечание 1. Принято считать, что ток, входящий в узел, имеет отрицательный знак, а ток, выходящий из узла, имеет положительный знак. Количество уравнений ЗТК ($n_y - 1$), где n_y – количество узлов. Количество уравнений ЗНК ($n_b - n_y + 1$), где n_b – количество ветвей в контуре.

Замечание 2. Напряжения, совпадающие с направлением обхода контура, берутся со знаком «+», а не совпадающие берутся со знаком «-».

Замечание 3. Закон Ома справедлив только для линейных цепей. Законы Кирхгофа справедливы как для линейных, так и для нелинейных цепей.

Принцип наложения (суперпозиции): реакция линейной электрической цепи на сумму воздействий равна сумме реакций от каждого воздействия в отдельности (принцип несправедлив для нелинейных цепей).

Ток в любой j -ой ветви от n воздействий (источников) равен сумме токов от каждого k -го воздействия

$$i^{(j)} = \sum_{k=1}^n i_k^{(j)}. \quad (1.20)$$

Напряжение j -ой ветви от всех n воздействий равно сумме напряжений от каждого k -го воздействия

$$u^{(j)} = \sum_{k=1}^n u_k^{(j)}. \quad (1.21)$$

Теорема замещения: значение всех токов и напряжений в цепи не изменится, если любую ветвь цепи заменить источником напряжения с задающим напряжением $u_{\Gamma} = u$ или источником тока с задающим током $i_{\Gamma} = i$.

Принцип дуальности: если для данной электрической цепи справедливы некоторые законы, уравнения или соотношения, то они справедливы и для дуальных величин в дуальной цепи.

В силу принципа дуальности: $R \leftrightarrow G, u \leftrightarrow i, C \leftrightarrow L, u_{\Gamma} \leftrightarrow i_{\Gamma}, \text{ЗТК} \leftrightarrow \text{ЗНК}$, последовательное соединение элементов $\leftrightarrow$ параллельное соединение дуальных элементов.

Теоремы об активном двухполюснике

Теорема об эквивалентном источнике напряжения (теорема Тевенина): ток в любой ветви линейной электрической цепи не изменится, если активный двухполюсник, к которому подключена данная ветвь, заменить эквивалентным источником напряжения, с задающим напряжением, равным напряжению холостого хода на зажимах разомкнутой ветви и внутренним сопротивлением, равным эквивалентному входному сопротивлению пассивного двухполюсника со стороны разомкнутой ветви.

Теорема об эквивалентном источнике тока (теорема Нортон): ток в любой ветви линейной электрической цепи не изменяется, если активный двухполюсник, к которому подключена данная ветвь, заменить эквивалентным источником тока с задающим током, равным току короткого замыкания этой ветви, и внутренним сопротивлением, равным эквивалентному входному сопротивлению со стороны разомкнутой ветви.

Теорема Телледжена: алгебраическая сумма произведений напряжений u_k и токов i_k всех ветвей цепи, удовлетворяющих законам Кирхгофа, равна нулю

$$\sum_{k=1}^n u_k \cdot i_k = 0. \quad (1.22)$$

Баланс мощности – алгебраическая сумма мощностей, отдаваемых независимыми источниками, равна сумме мощностей, потребляемых остальными ветвями электрической цепи

$$\sum_{k=1}^n p_{k \text{ ист.}} = \sum_{j=1}^m p_{j \text{ потр.}} \quad (1.23)$$

В сумме мощность источника напряжения берется со знаком «+», если направления задающего напряжения u_k и тока i_k противоположны, со знаком «-», если совпадают. Для источника тока берется знак «+», если направления задающего тока i_k и напряжения u_k на зажимах источника тока противоположны, знак «-», если совпадают.

Баланс мощности выражает закон сохранения энергии в электрической цепи и позволяет проверить правильность произведенных расчетов.

Принцип взаимности (теорема обратимости): если источник напряжения, помещенный в какую-либо ветвь l пассивной линейной электрической цепи, вызывает в другой ветви k ток I_k , то этот же источник, помещенный в ветвь k , вызовет в ветви l ток I_l , значение которого равно току I_k .

Принцип эквивалентности: напряжения и токи в ветвях схемы, не затронутых преобразованиями, остаются неизменными.

Преобразования электрических схем

а. Последовательное соединение элементов:

– резистивных элементов (рис. 1.15 а) $R_{\text{ЭКВ}} = \sum_{k=1}^n R_k ; \quad (1.24)$

– индуктивных элементов (рис. 1.15 б) $L_{\text{ЭКВ}} = \sum_{k=1}^n L_k ; \quad (1.25)$

– емкостных элементов (рис. 1.15 в) $\frac{1}{C_{\text{ЭКВ}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} ; \quad (1.26)$

– источников напряжений (рис. 1.15 г) $E_{\text{ЭКВ}} = \sum_{k=1}^n E_k ; \quad (1.27)$

E_k , совпадающие с направлением тока в ветви берутся со знаком «+», не совпадающие – со знаком «-».

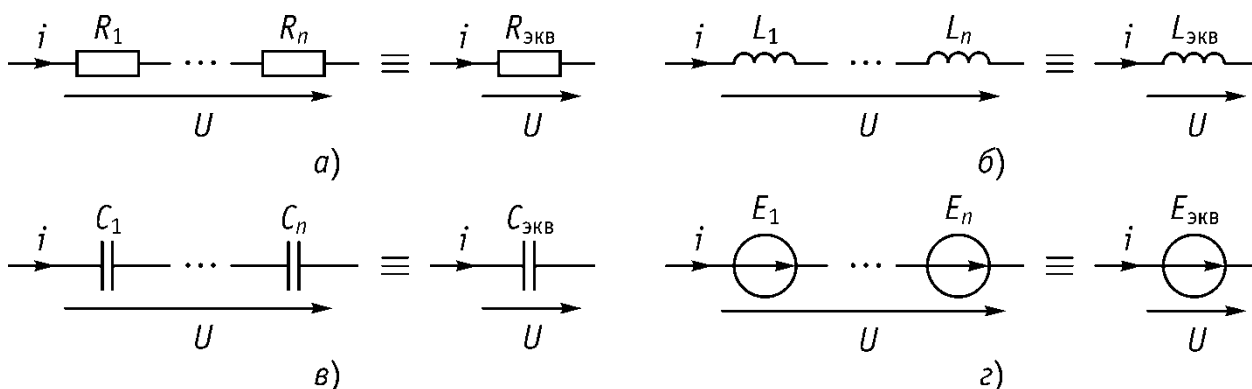


Рис. 1.15

б. Параллельное соединение элементов:

– резистивных элементов (рис. 1.16 а)

$$\frac{1}{R_{\text{ЭКВ}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}; \quad (1.28)$$

– индуктивных элементов (рис. 1.16 б)

$$\frac{1}{L_{\text{ЭКВ}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k}; \quad (1.29)$$

– емкостных элементов (рис. 1.16 в)

$$C_{\text{ЭКВ}} = \sum_{k=1}^n C_k; \quad (1.30)$$

– источников тока (рис. 1.16 г)

$$I_{\text{ЭКВ}} = \sum_{k=1}^n I_k. \quad (1.31)$$

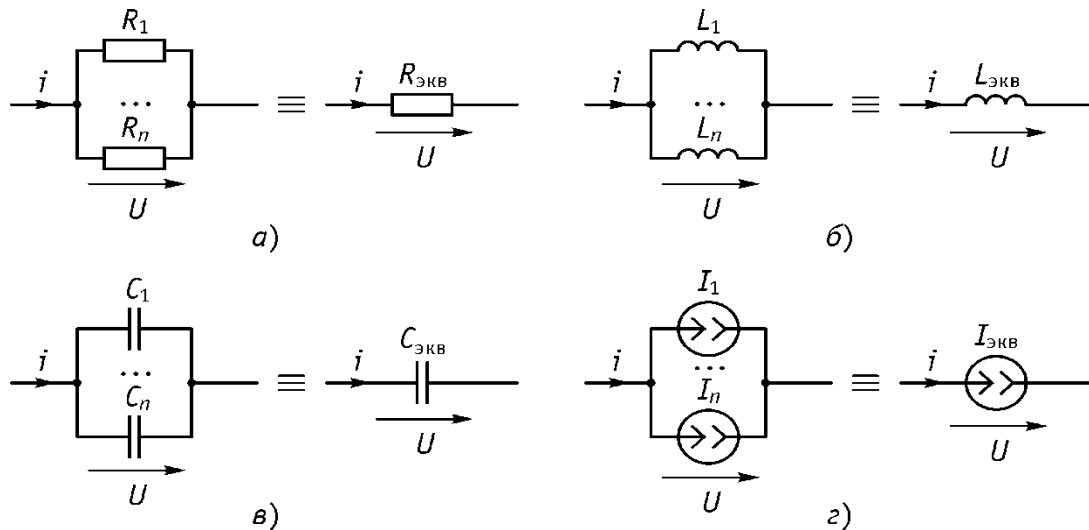


Рис. 1.16

Преобразование соединения типа «треугольник» в соединение типа «звезда» и наоборот (рис. 1.17)

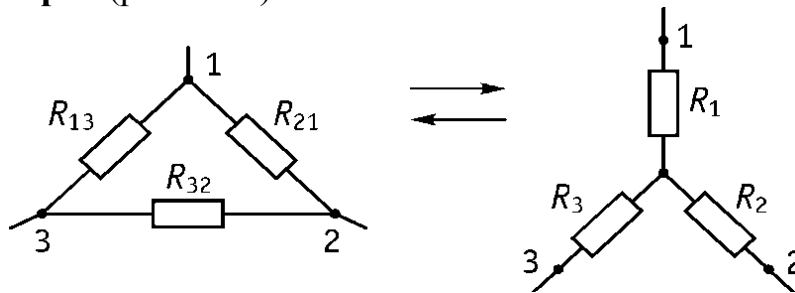


Рис. 1.17

Преобразование «треугольника» в «звезду»

$$R_1 = \frac{R_{21} \cdot R_{13}}{R_{21} + R_{13} + R_{32}}; \quad R_2 = \frac{R_{21} \cdot R_{32}}{R_{21} + R_{13} + R_{32}}; \quad R_3 = \frac{R_{13} \cdot R_{32}}{R_{13} + R_{21} + R_{32}}. \quad (1.32)$$

Преобразование «звезды» в «треугольник»

$$R_{21} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}; R_{32} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}; R_{13} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}. \quad (1.33)$$

Преобразование реального источника напряжения в реальный источник тока (эквивалентные источники тока и напряжения (рис. 1.18))

$$i_{\Gamma} = E_{\Gamma} / R_{\Gamma}, \quad E_{\Gamma} = i_{\Gamma} \cdot R_{\Gamma}.$$

Эти соотношения можно получить, если воспользоваться принципом эквивалентности.

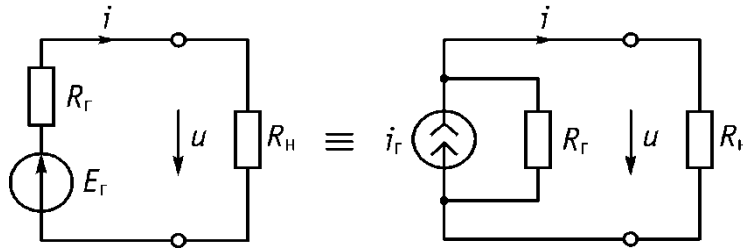


Рис. 1.18

Примеры и задачи

Пример 1. Задан участок цепи с источниками тока и напряжения (рис. 1.19). Найти ток в цепи.

$V_a = 5 \text{ В}$, $V_b = 5 \text{ В}$, $E_1 = 2 \text{ В}$, $E_2 = 4 \text{ В}$, $J = 10 \text{ мА}$, $R_1 = 1 \text{ кОм}$, $R_2 = 2 \text{ кОм}$, $R_3 = 3 \text{ кОм}$, $R_4 = 4 \text{ кОм}$.

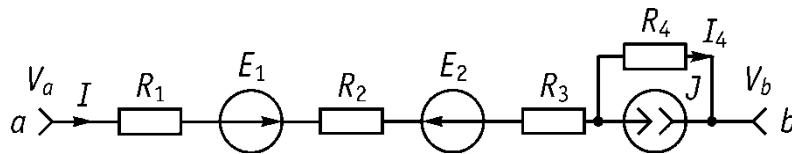


Рис. 1.19

Решение

1. Записываем уравнение ЗНК

$$U_{ab} = V_a - V_b = I \cdot R_1 - U_{\Gamma 1} + I \cdot R_2 + U_{\Gamma 2} + I \cdot R_3 + I_4 \cdot R_4.$$

2. Определяем ток I_4 через токи I и J , используя ЗТК: $I = I_4 + J \rightarrow I_4 = I - J$ и подставляем его значение в верхнее выражение, получаем

$$U_{ab} = I (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) - U_{\Gamma 1} + U_{\Gamma 2} - J \cdot R_4.$$

3. Определяем ток I

$$I = \frac{U_{ab} + U_{\Gamma 1} - U_{\Gamma 2} + J \cdot R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{U_{ab} + \sum_{i=1}^2 U_{\Gamma i} + J \cdot R_4}{\sum_{j=1}^4 R_j}.$$

$$I = \frac{4 + 2 - 4 + 10}{(1 + 2 + 3 + 4) \cdot 10^3} = \frac{12}{10 \cdot 10^3} = 1,2 \text{ мА}.$$

Пример 2. Задан реальный источник напряжения. Требуется преобразовать источник напряжения (рис. 1.20 а) в реальный источник тока (рис. 1.20 б).

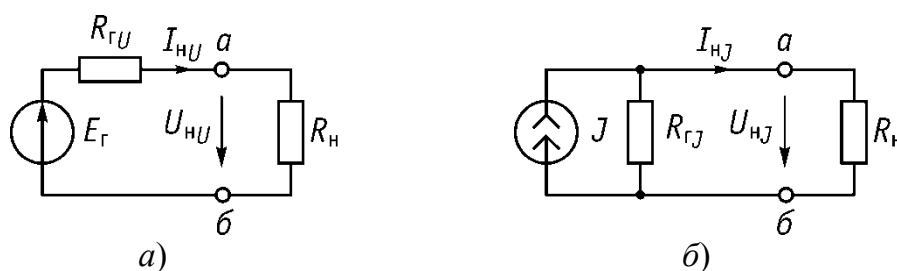


Рис. 1.20

В схемах $I_{нU}$, $I_{нJ}$, $U_{нU}$, $U_{нJ}$ – соответственно токи и напряжения на выходе источников.

Решение

1. Определяем выходной ток $I_{нU}$ и выходное напряжение $U_{нU}$ источника напряжения

$$I_{нU} = \frac{E_r}{R_{гU} + R_n}; \quad U_{нU} = R_n I_{нU} = \frac{E_r R_n}{R_{гU} + R_n}.$$

2. Определяем выходной ток $I_{нJ}$ и выходное напряжение $U_{нJ}$ источника тока

$$I_{нJ} = \frac{J \cdot R_{гJ}}{R_{гJ} + R_n}; \quad U_{нJ} = R_n I_{нJ} = \frac{J \cdot R_{гJ} R_n}{R_{гJ} + R_n}.$$

3. Используя принцип эквивалентности, приравняем выходные токи и выходные напряжения

$$1) I_{нJ} = I_{нU} \rightarrow \frac{E_r}{R_{гU} + R_n} = \frac{J \cdot R_{гJ}}{R_{гJ} + R_n}.$$

$$2) U_{нJ} = U_{нU} \rightarrow \frac{E_r R_n}{R_{гU} + R_n} = \frac{J \cdot R_{гJ} R_n}{R_{гJ} + R_n}.$$

При $R_n = 0$ из уравнения 1) следует $E_r / R_{гU} = J$.

При $R_n = \infty$ из уравнения 2) следует $E_r = J \cdot R_{гJ}$.

Из последних равенств следует $R_{гJ} = R_{гU}$.

Пример 3. Задана электрическая цепь (рис. 1.21). Найти эквивалентное сопротивление относительно зажимов а-б.

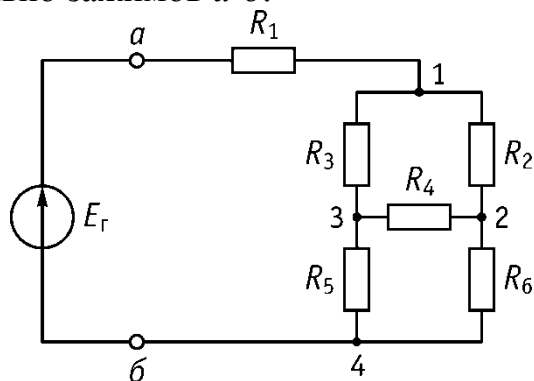


Рис. 1.21

$$R_1 = 2 \text{ кОм}, R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 1 \text{ кОм}.$$

Решение

1. Преобразуем, например, верхний «треугольник» 1-2-3 в соединение типа «звезда», используя принцип эквивалентности (рис.1.22).

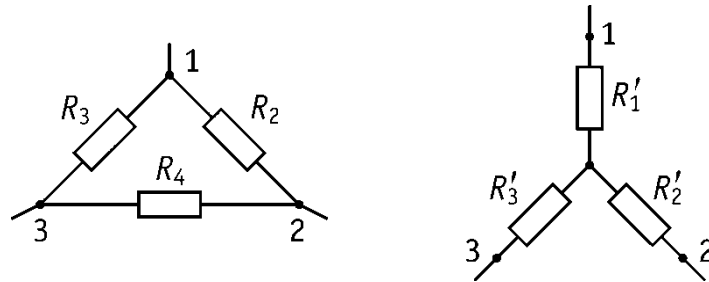


Рис. 1.22

$$R'_1 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{1}{3} \text{ кОм}; R'_2 = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{1}{3} \text{ кОм}; R'_3 = \frac{R_3 R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{1}{3} \text{ кОм}.$$

2. Представим электрическую цепь (рис. 1.23).

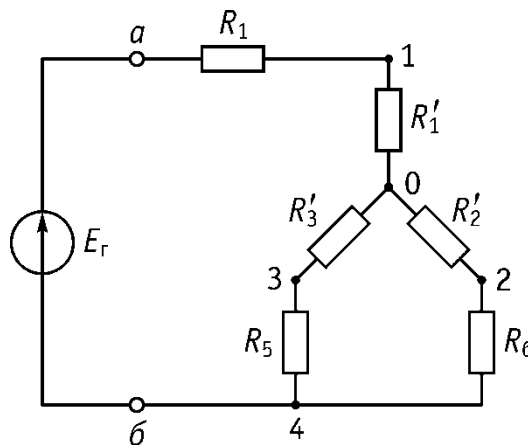


Рис. 1.23

3. Определяем сопротивления ветвей $R_{2'6}$, $R_{3'5}$

$$R_{2'6} = R'_2 + R_6 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \text{ кОм},$$

$$R_{3'5} = R'_3 + R_5 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \text{ кОм}.$$

4. Определяем сопротивление при параллельном соединении ветвей $R_{2'6} \parallel R_{3'5}$ (относительно узлов 0-4)

$$R_{04} = \frac{R_{2'6} R_{3'5}}{R_{2'6} + R_{3'5}} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3}}{\frac{4}{3} + \frac{4}{3}} = \frac{4}{3 \cdot 2} = \frac{2}{3} \text{ кОм}.$$

5. Определяем эквивалентное сопротивление электрической цепи относительно зажимов а-б

$$R_{\text{экв а-б}} = R_1 + R'_1 + R_{04} = 2 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 3 \text{ кОм}.$$

Пример 4. Задана электрическая цепь (рис. 1.24). Требуется определить показания вольтметра.

$$E_1 = 10 \text{ В}, E_2 = 20 \text{ В}, R_1 = R_2 = 10 \text{ Ом}.$$

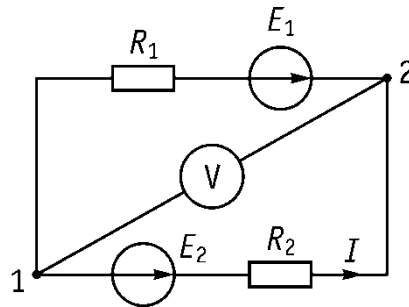


Рис. 1.24

Решение

Обозначим места подключения вольтметра как узлы 1 и 2. Зададим направление тока по направлению большего из источников. Считаем, что сопротивление идеального вольтметра бесконечно велико, следовательно, ток через него равен нулю. Тогда по закону Ома:

$$I = \frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_2} = \frac{20 - 10}{10 + 10} = 0,5 \text{ А}.$$

Запишем закон Ома для участка цепи

$$I = \frac{V_1 - V_2 + E_2}{R_2}.$$

Вольтметр показывает модуль напряжения

$$U_V = |V_1 - V_2| = |I \cdot R_2 - E_2| = |0,5 \cdot 10 - 20| = |-15| = 15 \text{ В}.$$

ТЕМА 2. Линейные электрические цепи в режиме постоянного тока

Лекция 3

Методы анализа и расчета линейных электрических цепей

Для расчета линейных электрических цепей используются следующие методы: метод свертывания, метод законов Кирхгофа, метод наложения, метод эквивалентного генератора, метод контурных токов, метод узловых потенциалов. Рассмотрим только методы законов Кирхгофа, метод узловых напряжений и метод наложения.

Метод законов Кирхгофа

Метод базируется на первом и втором законах Кирхгофа (ЗТК и ЗНК).

Количество уравнений ЗНК: $n_{\text{ЗНК}} = n_{\text{в}} - n_{\text{у}} + 1$, если нет ветви с источником тока, где $n_{\text{в}}$ – количество ветвей, $n_{\text{у}}$ – количество узлов в схеме, и $n_{\text{ЗНК}} = n_{\text{в}} - n_{\text{у}} - n_{\text{т}} + 1$, если есть ветви с источниками тока, где $n_{\text{т}}$ – количество ветвей с источниками тока.

Количество уравнений ЗТК: $n_{\text{ЗТК}} = n_{\text{у}} - 1$.

Заметим, что при составлении уравнений ЗНК нельзя выбирать контуры с источником тока. Выбираются **независимые контуры** – это контуры, которые отличаются друг от друга хотя бы одной новой ветвью.

Пусть имеется электрическая схема, изображенная на рис. 2.1. Необходимо найти токи в ветвях и напряжения на элементах схемы методом законов Кирхгофа.

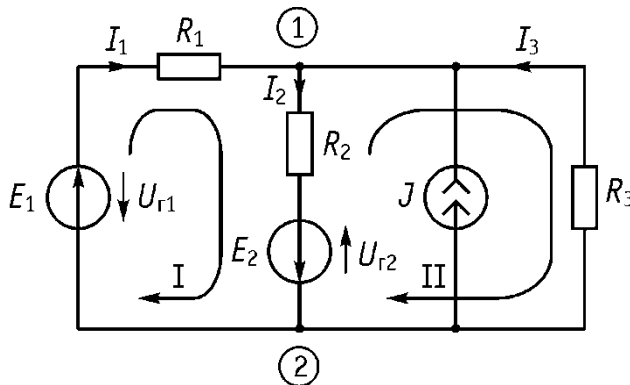


Рис. 2.1

Порядок анализа

1. Обозначаем узлы ①, ②.
2. Обозначаем токи в ветвях I_1, I_2, I_3 .
3. Выбираем независимые контуры I и II.
4. Выбираем направление обхода контуров, например, по часовой стрелке.
5. Составляем $(n_{\text{у}} - 1)$ уравнений ЗТК ($n_{\text{у}} - 1 = 2 - 1 = 1$). Для узла 1:

$$-I_1 + I_2 - J - I_3 = 0. \quad (2.1)$$

6. Составляем $(n_{\text{в}} - n_{\text{у}} - n_{\text{т}} + 1)$ уравнений ЗНК ($n_{\text{в}} - n_{\text{у}} - n_{\text{т}} + 1 = 4 - 2 - 1 + 1 = 2$)

$$\text{для контура I } -U_{r1} + I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 - U_{r2} = 0, \quad (2.2)$$

$$\text{для контура II } +U_{r2} - I_2 \cdot R_2 - I_3 \cdot R_3 = 0. \quad (2.3)$$

7. Запишем систему уравнений ЗТК и ЗНК, оставив в левой части слагаемое с неизвестными токами, а в правую часть перенесем известные слагаемые

$$\begin{cases} -I_1 + I_2 - J - I_3 = 0, \\ I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 = U_{r1} + U_{r2}, \\ -I_2 \cdot R_2 - I_3 \cdot R_3 = -U_{r2}. \end{cases} \quad (2.4)$$

8. Решаем систему уравнений относительно неизвестных токов I_1, I_2, I_3 , например, с помощью определителей

$$I_1 = \Delta_1 / \Delta, \quad I_2 = \Delta_2 / \Delta, \quad I_3 = \Delta_3 / \Delta, \quad (2.5)$$

где Δ – главный определитель, состоящий из коэффициентов при неизвестных токах; $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ – определители, полученные соответствующей заменой 1-го, 2-го, 3-го столбцов главного определителя столбцом свободных членов.

9. После определения токов I_1, I_2, I_3 , находим напряжения на элементах схемы по закону Ома, например, $U_{R1} = I_1 \cdot R_1$ и т. д.

Замечание. Чтобы определить напряжение на зажимах источника тока, необходимо напряжение на источнике тока обозначить как U_J , записать уравнение ЗНК для контура с источником тока и определить U_J .

Метод наложения

Метод базируется на принципе суперпозиции.

Пусть имеется электрическая цепь, приведенная на рис. 2.2. Необходимо определить токи в ветвях и напряжения на элементах цепи (для определенности положим $J = 1$ А, $E_1 = E_2 = 1$ В, $R_1 = R_2 = R_3 = 1$ Ом).

Порядок анализа (расчета)

1. Обозначаем узлы ①, ②.
2. Обозначаем токи в ветвях I_1, I_2, I_3 .
3. Определяем частичные токи I'_1, I'_2, I'_3 от одного воздействия, например, источника тока. Для этого:

а) удаляем из схемы источники напряжения (E_1, E_2 убираем совсем), а зажимы, к которым были подключены источники напряжения, соединяем вместе, т.е. замыкаем;

б) получаем первую частичную схему (рис. 2.3 а);

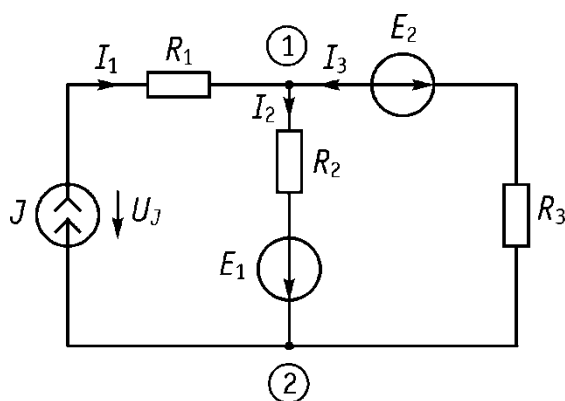


Рис. 2.2

в) определяем токи: $I'_1 = J = 1 \text{ A}$; токи I'_2, I'_3 определяем по формуле «разброса» $I'_3 = I'_1 \cdot R_2 / (R_3 + R_2)$; $I'_2 = I'_1 \cdot R_3 / (R_3 + R_2)$ (рис. 2.3 б).

$$I'_2 = J \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 1 \cdot \frac{1}{2} = 0,5 \text{ A}; \quad I'_3 = J \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 1 \cdot \frac{1}{2} = 0,5 \text{ A}.$$

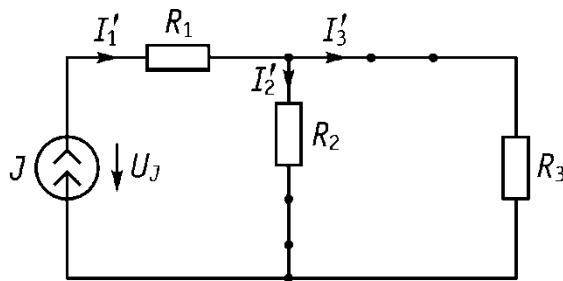
4. Определяем частичные токи I''_1, I''_2, I''_3 от другого воздействия, например, от источника E_1 . Для этого:

а) удаляем из схемы источники тока J и напряжения E_2 , а зажимы, к которым был подключен источник тока J , оставляем разомкнутыми. Зажимы, к которым был подключен источник напряжения E_2 , замыкаем;

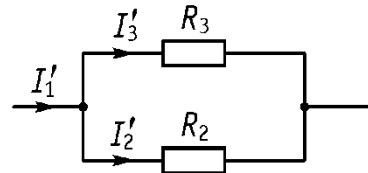
б) получаем вторую частичную схему, которая приведена на рис. 2.3 в;

в) определяем вторые частичные токи схемы

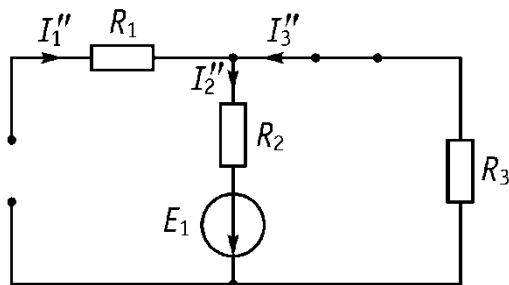
$$I''_1 = 0; \quad I''_2 = I''_3 = \frac{E_1}{R_2 + R_3} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ A}.$$



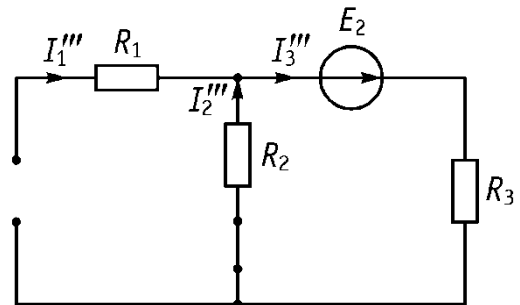
а)



б)



в)



г)

Рис. 2.3

5. Определяем частичные токи I'''_1, I'''_2, I'''_3 от оставшегося источника напряжения E_2 . Для этого:

а) из схемы удаляем источник тока J и источник напряжения E_1 . Зажимы, к которым был подключен источника тока, размыкаем, а зажимы, к которым был подключен источник напряжения E_1 , замыкаем;

б) получаем третью частичную схему, которая приведена на рис. 2.3 г;

в) определяем токи I'''_1, I'''_2, I'''_3

$$I'''_1 = 0; \quad I'''_2 = I'''_3 = E_2 / (R_2 + R_3) = 0,5 \text{ A}.$$

6. Определяем токи I_1, I_2, I_3 , как алгебраическую сумму частичных токов

$$I_1 = I'_1 + I''_1 + I'''_1 = J = 1 \text{ A},$$

$$I_2 = I'_2 + I''_2 - I'''_2 = 0,5 + 0,5 - 0,5 = 0,5 \text{ А},$$

$$I_3 = -I'_3 + I''_3 - I'''_3 = -0,5 + 0,5 - 0,5 = -0,5 \text{ А}.$$

7. Определяем напряжения на элементах схемы по закону Ома

$$U_{R_i} = R_i I_i.$$

$$U_{R_1} = 1 \cdot 1 = 1 \text{ В}, \quad U_{R_2} = 0,5 \cdot 1 = 0,5 \text{ В}, \quad U_{R_3} = -0,5 \cdot 1 = -0,5 \text{ В}.$$

8. Определяем баланс мощности

$$\sum P_{\text{ист}} = \sum P_{\text{потр}}. \quad (2.6)$$

Чтобы найти напряжение на зажимах источника тока, нужно взять контур с источником тока и записать уравнение ЗНК

$$-U_J + I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 - U_{\text{ГЛ}} = 0.$$

$$U_J = 1 \cdot 1 + 0,5 \cdot 1 - 1 = 0,5 \text{ В}.$$

$$\sum P_{\text{ист}} = 0,5 \cdot 1 + 0,5 \cdot 1 + 0,5 \cdot 1 = 1,5 \text{ Вт}.$$

$$\sum P_{\text{потр}} = 1^2 \cdot 1 + 0,5^2 \cdot 1 + 0,5^2 \cdot 1 = 1,5 \text{ Вт}.$$

Баланс мощности выполняется, следовательно, расчет схемы выполнен верно.

Метод узловых напряжений

Метод узловых напряжений (потенциалов) базируется на ЗТК и законе Ома, является наиболее распространенным методом, так как позволяет производить расчеты цепей с зависимыми источниками тока.

Количество уравнений $n_{\text{ур}} = n_{\text{уз}} - 1$, если нет ветви с идеальным источником напряжения (ветвь, которая содержит только источник) и $n_{\text{ур}} = n_{\text{уз}} - n_{\text{и}} - 1$ в противном случае.

Пусть имеется электрическая цепь, приведенная на рис. 2.4. Необходимо определить токи в ветвях и напряжения на элементах.

Порядок расчета

1. Обозначаем узлы схемы ①, ②, ③, ④ и потенциалы узлов V_1, V_2, V_3, V_4 .

2. Обозначаем токи в ветвях схемы $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$.

3. Выбираем **базисный узел** – такой узел, значение потенциала которого принимается равным нулю. При этом заметим:

а) если в схеме нет ветви с идеальным источником ЭДС, тогда в качестве базисного узла может быть выбран любой узел;

б) если в схеме есть ветвь с идеальным источником напряжения (у нас это ветвь с источником E_1), тогда в качестве базисного узла принимается узел схемы, к которому подключен «минус» идеального источника ЭДС. При этом потенциал узла, к которому подключен «плюс» источника принимается равным значению ЭДС ($V_2 = E_1$) и для этого узла уравнение узловых напряжений не составляется.

4. Составляем уравнения по ЗТК для узлов 1 и 3

$$\begin{aligned} \text{для узла 1} \quad & -I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ \text{для узла 3} \quad & -I_3 + I_6 + I_5 - I_4 = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

5. Определяем токи в ветвях через напряжения узлов, используя закон Ома для участка цепи без источника и с источником ЭДС

$$\begin{aligned} I_1 &= J; \quad I_2 = (V_1 - V_2)/R_1 = (V_1 - E_1)/R_1; \quad I_3 = (V_1 - V_3 - E_3)/R_3; \\ I_4 &= \frac{V_2 - V_3}{R_4} = \frac{E_1 - V_3}{R_4}; \quad I_5 = \frac{V_3 - V_4 + E_2}{R_2} = \frac{V_3 + E_2}{R_2}; \quad I_6 = \frac{V_3 - V_4}{R_5} = \frac{V_3}{R_5}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

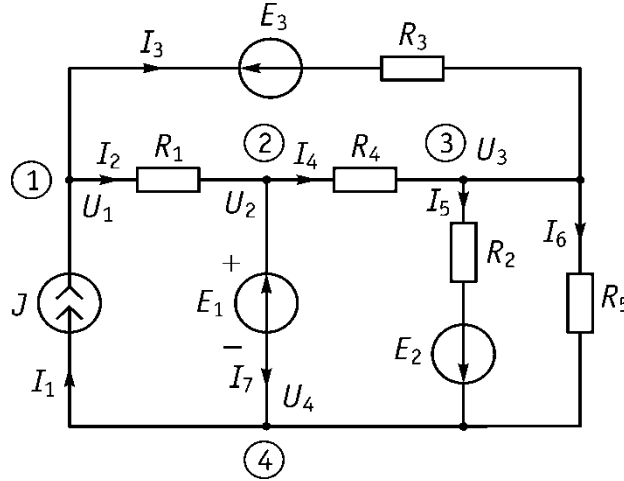


Рис. 2.4

6. Подставляем полученные уравнения для тока в уравнения ЗТК, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{V_1 - E_1}{R_1} + \frac{V_1 - V_3 - E_3}{R_3} - J = 0 \\ -\frac{V_1 - V_3 - E_3}{R_3} + \frac{V_3 + E_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_5} - \frac{E_1 - V_3}{R_4} = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Преобразуем систему: неизвестные потенциалы – влево, известные слагаемые – вправо, имеем

$$\begin{cases} V_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) - V_2 \left(\frac{1}{R_1} \right) - V_3 \left(\frac{1}{R_3} \right) = J + \frac{E_3}{R_3} = I_{y1} \\ -V_1 \left(\frac{1}{R_3} \right) - V_2 \left(\frac{1}{R_4} \right) + V_3 \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_4} \right) = -\frac{E_3}{R_3} - \frac{E_2}{R_2} = I_{y3}. \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} V_1 \cdot G_{11} - V_2 \cdot G_{12} - V_3 \cdot G_{13} = I_{y1} \\ -V_1 \cdot G_{31} - V_2 \cdot G_{32} + V_3 \cdot G_{33} = I_{y3}. \end{cases}$$

где G_{11}, G_{33} – собственные проводимости узлов 1 и 3, равные сумме проводимостей всех ветвей, подключенных к узлам 1 и 3; G_{13}, G_{31} – взаимные проводимости узлов 1 и 3, равные сумме проводимостей ветвей, включенных между узлами; I_{y1}, I_{y3} – узловые задающие токи соответственно 1 и 3 узлов, равные алгебраической сумме задающих токов источников, подключенных соответ-

ственно к первому и третьему узлам. В алгебраической сумме токи берутся со знаком «+», если положительное направление задающего тока источника ориентировано к узлу, и «−», если от узла.

Система уравнений может быть записана для электрической цепи с n узлами. Пусть, например, n -й узел принят за базисный, $V_n = 0$, тогда имеем $(n - 1)$ уравнений узловых потенциалов

$$\begin{cases} G_{11} \cdot V_1 - G_{12} \cdot V_2 - \dots - G_{1(n-1)} V_{n-1} = I_{y1} \\ -G_{21} \cdot V_1 + G_{22} \cdot V_2 - \dots - G_{2(n-1)} V_{n-1} = I_{y2} \\ \dots \\ -G_{(n-1)1} \cdot V_1 - G_{(n-1)2} \cdot V_2 - \dots + G_{(n-1)(n-1)} \cdot V_{n-1} = I_{y(n-1)} \end{cases} \quad (2.10)$$

7. Решаем систему уравнений относительно неизвестных узловых потенциалов с помощью определителей

$$V_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad (2.11)$$

где Δ – главный определитель системы; Δ_i – определители, полученные путем замены i -х столбцов в определителе Δ столбцом узловых токов.

8. Зная узловые потенциалы, определяем токи и находим напряжения на элементах схемы.

Замечание. Метод узловых напряжений применим, если в электрической цепи имеются зависимые источники тока (ИТУТ, ИТУН).

Условие передачи максимальной мощности от источника напряжения в нагрузку

Пусть имеется электрическая цепь, приведенная на рисунке 2.5. Необходимо найти условие, при котором в нагрузке будет выделяться максимальная активная мощность.

Замечание. Можно привести сколь угодно сложную электрическую схему, содержащую n источников напряжения, m источников тока, k – сопротивлений, используя теорему об эквивалентном генераторе, к схеме (рис. 2.5).

Порядок анализа

1. Определяем мощность на нагрузке

$$P_H = I^2 \cdot R_H = \frac{E^2}{(R_G + R_H)^2} \cdot R_H. \quad (2.12)$$

2. Возьмем производную от P_H по R_H и приравняем к нулю

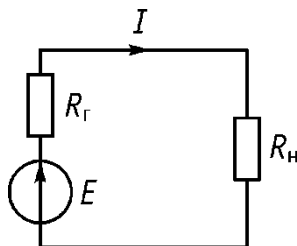


Рис. 2.5

$$\frac{\partial P_{\text{H}}}{\partial R_{\text{H}}} = \frac{\partial \left(\frac{E^2}{(R_{\Gamma} + R_{\text{H}})^2} \cdot R_{\text{H}} \right)}{\partial R_{\text{H}}} = 0, \quad (2.13)$$

откуда находим условие передачи максимальной мощности от источника напряжения в нагрузку ($R_{\Gamma} = R_{\text{H}}$). При этом условии максимальная мощность равна

$$P_{\text{Hmax}} = E^2 / (4R_{\Gamma}). \quad (2.14)$$

Примеры и задачи

Пример 1. Задана электрическая цепь (рис. 2.6). Требуется определить токи в ветвях и напряжения на элементах схемы методом узловых напряжений.

$J = 2 \text{ мА}$, $E_1 = E_2 = 1 \text{ В}$, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1 \text{ кОм}$.

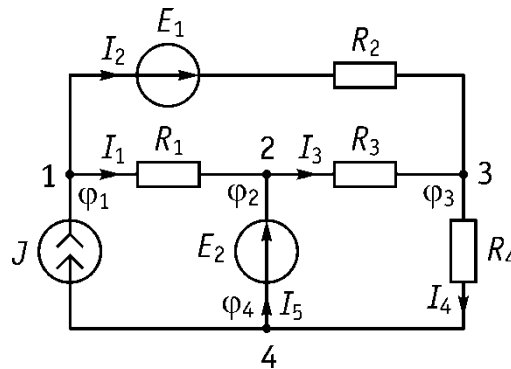


Рис. 2.6

Решение

1. Обозначаем узлы и потенциалы узлов.
2. Выбираем базисный узел и приравниваем его потенциал к нулю. В качестве базисного узла выбираем узел 4, так как имеется ветвь с идеальным источником E_2 , где $V_4 = 0$.

3. Записываем уравнения узловых напряжений

$$\text{Для узла 1: } V_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - V_2 \left(\frac{1}{R_1} \right) - V_3 \left(\frac{1}{R_2} \right) = J - \frac{E_1}{R_2}.$$

$$\text{Для узла 2: } V_2 = E_2 = 1.$$

$$\text{Для узла 3: } V_3 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) - V_2 \left(\frac{1}{R_3} \right) - V_1 \left(\frac{1}{R_2} \right) = \frac{E_1}{R_2}.$$

4. Подставляем в уравнения значения известных величин

$$\begin{cases} V_1 \left(\frac{2}{10^3} \right) - 1 \left(\frac{1}{10^3} \right) - V_3 \left(\frac{1}{10^3} \right) = 2 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{10^3} \\ V_3 \left(\frac{3}{10^3} \right) - 1 \left(\frac{1}{10^3} \right) - V_1 \left(\frac{1}{10^3} \right) = \frac{1}{10^3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 \cdot 2 \cdot 10^{-3} - V_3 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 2 \cdot 10^{-3} \\ -V_1 \cdot 1 \cdot 10^{-3} + V_3 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 2 \cdot 10^{-3} \end{cases}$$

5. Решаем полученную систему относительно неизвестных узловых напряжений. Получаем $V_1 = 1,6 \text{ В}$, $V_3 = 1,2 \text{ В}$.

6. Зная потенциалы, определяем токи.

$$I_1 = \frac{V_1 - V_2}{R_1} = \frac{1,6 - 1,2}{10^{-3}} = 0,6 \text{ мА}; I_2 = \frac{V_1 - V_3 + U_{r1}}{R_2} = \frac{1,6 - 1,2 + 1}{10^{-3}} = 1,4 \text{ мА};$$

$$I_3 = \frac{V_2 - V_3}{R_3} = \frac{1 - 1,2}{10^{-3}} = -0,2 \text{ мА}; I_4 = \frac{V_3 - 0}{R_4} = \frac{1,2}{10^{-3}} = 1,2 \text{ мА};$$

$$I_5 = I_3 - I_1 = -0,2 - 0,6 = -0,8 \text{ мА}.$$

7. Зная токи, определяем падение напряжения на каждом элементе R .

$$U_1 = I_1 R_1 = 1,6 \text{ В}; U_2 = I_2 R_2 = 1,4 \text{ В}; U_3 = I_3 R_3 = -0,2 \text{ В}; U_4 = I_4 R_4 = 1,2 \text{ В}.$$

Пример 2. Задана электрическая цепь (рис. 2.7). Определить токи в ветвях методом законов Кирхгофа. Определить баланс мощности.

$$E_1 = 20 \text{ В}, E_2 = 50 \text{ В}, J = 4 \text{ мА}, R_1 = R_2 = 20 \text{ кОм}, R_3 = R_4 = 10 \text{ кОм}.$$

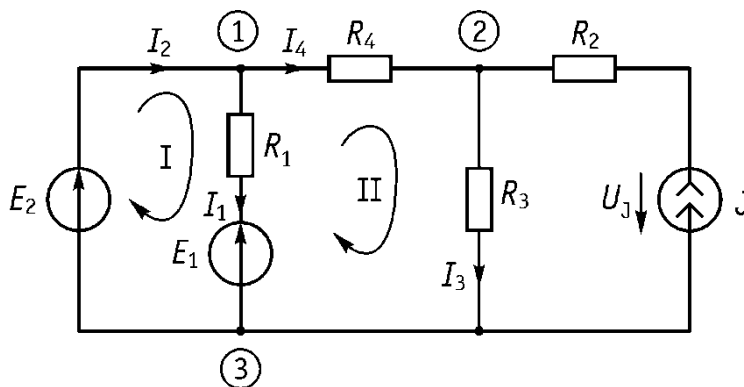


Рис. 2.7

Решение

1. Обозначим узлы и токи в ветвях.
2. Выбираем независимые контуры I и II и задаем направление их обхода.
3. Составляем уравнения по законам Кирхгофа.

По ЗТК уравнения для узлов 1 и 2:

$$I_2 - I_1 - I_4 = 0,$$

$$I_4 + J - I_3 = 0.$$

По ЗНК:

$$I_1 R_1 = U_{r2} - U_{r1},$$

$$I_4 R_4 + I_3 R_3 - I_1 R_1 = U_{r1}.$$

4. Подставим в уравнение значение известных величин:

$$\begin{cases} I_2 - I_1 - I_4 = 0, \\ I_4 + 4 \cdot 10^{-3} - I_3 = 0, \\ 20 \cdot 10^3 I_1 = 50 - 20, \\ 10 \cdot 10^3 I_4 + 10 \cdot 10^3 I_3 - 20 \cdot 10^3 I_1 = 20. \end{cases}$$

5. Решая полученную систему уравнений, определим неизвестные токи:

$$I_1 = 1,5 \text{ мА}; I_2 = 2 \text{ мА}; I_3 = 4,5 \text{ мА}; I_4 = 0,5 \text{ мА}.$$

6. Определяем баланс мощности $\sum P_{\text{ист}} = \sum P_{\text{потр}}$. Мощность, отдаваемая источниками

$$\sum P_{\text{ист}} = P_{E_1} + P_{E_2} + P_J = -E_1 I_1 + E_2 I_2 + U_J J.$$

Чтобы определить напряжение U_J на зажимах источника тока J , надо записать уравнение ЗНК для контура, содержащего источник тока J :

$$U_J - I_3 R_3 - J \cdot R_2 = 0.$$

Тогда

$$U_J = I_3 R_3 + J \cdot R_2 = 4,5 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^3 = 125 \text{ В}.$$

$$\sum P_{\text{ист}} = -20 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} + 50 \cdot 2 \cdot 10^{-3} + 125 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 570 \text{ мВт}.$$

Мощность, потребляемая элементами цепи:

$$\begin{aligned} \sum P_{\text{потр}} = I_1^2 R_1 + J^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 = & (1,5 \cdot 10^{-3})^2 20 \cdot 10^3 + (4 \cdot 10^{-3})^2 20 \cdot 10^3 + \\ & + (4,5 \cdot 10^{-3})^2 10 \cdot 10^3 + (0,5 \cdot 10^{-3})^2 10 \cdot 10^3 = 570 \text{ мВт}. \end{aligned}$$

Мощность источника E_1 отрицательна, значит, этот источник не отдает энергию в цепь, а потребляет ее.

Пример 3. Дана электрическая цепь (рис. 2.7). Определить токи в ветвях методом наложения.

$$E_1 = 20 \text{ В}, E_2 = 50 \text{ В}, J = 4 \text{ мА}, R_1 = R_2 = 20 \text{ кОм}, R_3 = R_4 = 10 \text{ кОм}.$$

1. Обозначим токи в ветвях.

2. Определим частичные токи от каждого из источников.

а) Частичная схема 1 (рис. 2.8) (источник напряжения E_2 и источник тока J удалены из схемы).

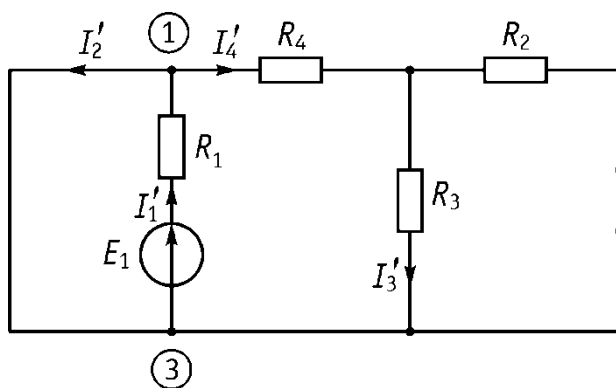


Рис. 2.8

В данной схеме через резистор R_2 ток не течет, резисторы R_3 и R_4 включены последовательно. Параллельно им к узлам 1 и 3 подключена ветвь с сопротивлением равным нулю. Тогда

$$I'_3 = I'_4 = 0, \quad I'_1 = I'_2 = \frac{E_1}{R_1} = \frac{20}{20 \cdot 10^{-3}} = 1 \text{ мА}.$$

б) Частичная схема 2 (рис. 2.9). Для определения токов выполним эквивалентные преобразования схемы. Резисторы R_3 и R_4 включены последовательно, заменим их одним (рис. 2.10 а)

$$R_{34} = R_3 + R_4 \text{ мА}.$$

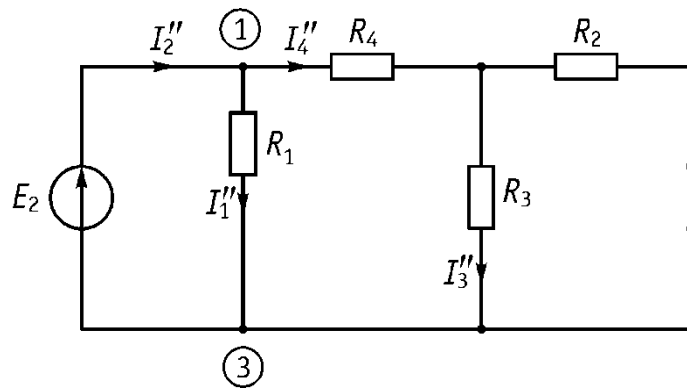


Рис. 2.9

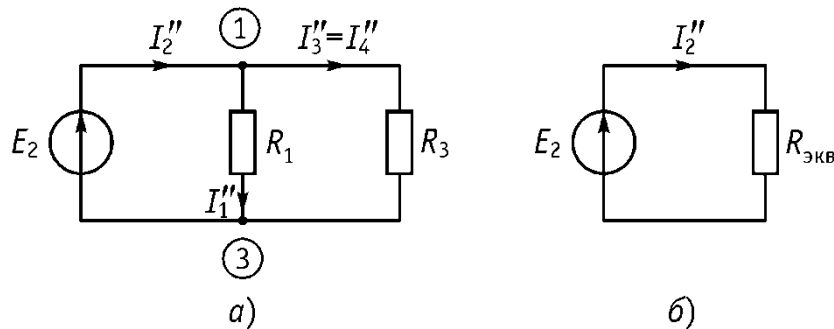


Рис. 2.10

Резистор R_{34} соединен с R_1 параллельно. Определим $R_{\text{эКВ}}$ (рис. 2.10 б):

$$R_{\text{эКВ}} = \frac{R_1 R_{34}}{R_1 + R_{34}} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^3 + 20 \cdot 10^3} = 10 \text{ кОм.}$$

Определим ток в ветви с источником по закону Ома:

$$I_2'' = \frac{E_2}{R_{\text{эКВ}}} = \frac{50}{10 \cdot 10^{-3}} = 5 \text{ мА.}$$

Токи в ветвях найдем по формуле «разброса»:

$$I_1'' = I_2'' \cdot \frac{R_{34}}{R_1 + R_{34}} = 5 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{20 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^3 + 20 \cdot 10^3} = 2,5 \text{ мА,}$$

$$I_3'' = I_4'' = I_2'' \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_{34}} = 5 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{20 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^3 + 20 \cdot 10^3} = 2,5 \text{ мА.}$$

в) Частичная схема 3 (рис. 2.11 а) (источники E_1 и E_2 удалены из схемы).

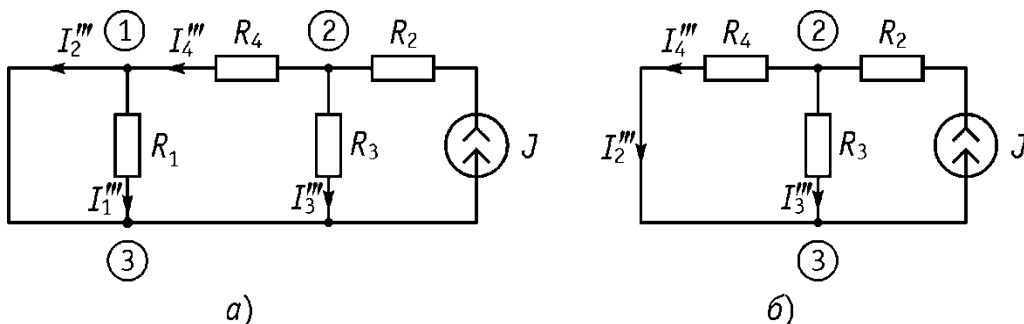


Рис. 2.11

Так как параллельно резистору R_1 включен провод с нулевым сопротивлением, то $I_1'''=0$, $I_4'''=I_2'''$ (рис. 2.11 б). По формуле «разброса»

$$I_3''' = J \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} = 4 \cdot 10^{-3} \frac{10 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^3} = 2 \text{ мА},$$

$$I_2''' = I_4''' = J \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_4} = 4 \cdot 10^{-3} \frac{10 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^3} = 2 \text{ мА}.$$

3. Определим результирующие токи как алгебраическую сумму частичных токов

$$I_1 = -I_1' + I_1'' + I_1''' = I_4''' = -1 + 2,5 + 0 = 1,5 \text{ мА},$$

$$I_2 = -I_2' + I_2'' - I_2''' = I_4''' = -1 + 5 - 2 = 2 \text{ мА},$$

$$I_3 = I_3' + I_3'' + I_3''' = I_4''' = 0 + 2,5 + 2 = 4,5 \text{ мА},$$

$$I_4 = I_4' + I_4'' - I_4''' = I_4''' = 0 + 2,5 - 2 = 0,5 \text{ мА}.$$

ТЕМА 3. Линейные электрические цепи в режиме гармонических колебаний

Лекция 4

Основные понятия. Законы Ома и Кирхгофа для мгновенных значений и комплексных амплитуд тока и напряжения

Гармоническое колебание – движение или изменение состояния материальных тел или материи (W, q, I, U, P) вокруг некоторого среднего значения по закону простейшей периодической функции вида

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (3.1)$$

где $f(t)$ может быть током $i(t)$ или напряжением $u(t)$.

Гармоническое колебание характеризуется: амплитудой A , начальной фазой φ , текущей фазой $\psi(t) = \omega t + \varphi$, угловой (круговой) частотой ω , циклической частотой $f = \omega/(2\pi)$, средним значением за период, средним значением за полпериода, действующим значением.

1. **Амплитуда** – максимальное отклонение от среднего значения

Пусть $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$, $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$.

Амплитуда напряжения U_m показана на рис. 3.1 а.

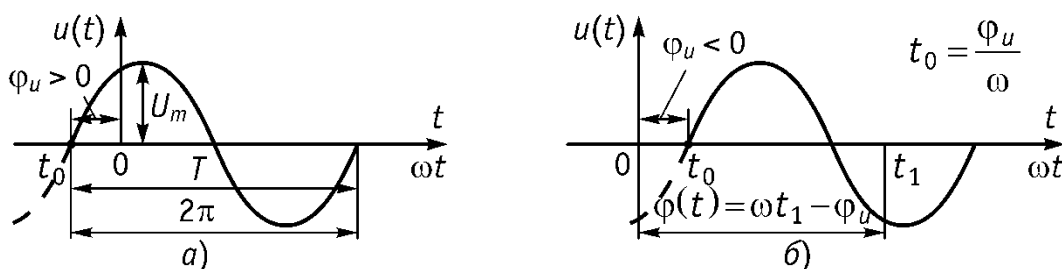


Рис. 3.1

2. **Начальная фаза** – значение смещения гармонического колебания (синусоиды) относительно начала координат до точки перехода синусоиды из отрицательной полуволны в положительную, причем начальная фаза имеет знак «+», если точка перехода находится слева от начала координат (рис. 3.1 а) и знак «-», если справа (рис. 3.1 б).

Единица измерения фазы (град) или (рад).

3. **Текущая фаза** – функция времени, значение которой возрастает с течением времени (рис. 3.1)

$$\psi(t) = \omega t + \varphi_u. \quad (3.2)$$

Единица измерения текущей фазы (град) или (рад).

4. **Период колебания** T – наименьший промежуток времени, по истечении которого значения функции $u(t)$ или $i(t)$ повторяются (рис. 3.1 а).

Единица измерения секунда (с), размерность [с]

$$T = 2\pi/\omega. \quad (3.3)$$

5. **Угловая (круговая) частота** ω – скорость изменения текущей фазы

$$\omega = \frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{d(\omega t + \varphi_u)}{dt} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f. \quad (3.4)$$

Единица измерения (рад/с).

6. **Циклическая частота** f – величина обратная периоду

$$f = 1/T = \omega/(2\pi). \quad (3.5)$$

Единица измерения герц (Гц), размерность [1/с].

7. **Мгновенное значение** – значение функции в произвольный момент времени t

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u). \quad (3.6)$$

8. **Действующее значение за период**

$$U_d = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707 U_m. \quad (3.7)$$

9. **Среднее значение за период**

$$U_{cp T} = \frac{1}{T} \int_0^T U_m \sin(\omega t + \varphi) dt = 0. \quad (3.8)$$

10. **Среднее значение за полпериода $T/2$**

$$U_{cp T/2} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} U_m \sin(\omega t + \varphi) dt = \frac{2}{\pi} U_m. \quad (3.9)$$

Замечание. Все соотношения, полученные для напряжения, используя принцип дуальности, можно записать и для тока.

Способы представления и изображения гармонических колебаний

1. **Представление функцией времени**, например, $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$, которую можно изобразить в виде временной диаграммы (рис. 3.2 а) или в виде вращающегося вектора $\vec{U}_m$, имеющего амплитуду U_m , начальную фазу φ_u и скорость вращения ω (рис. 3.2 б).

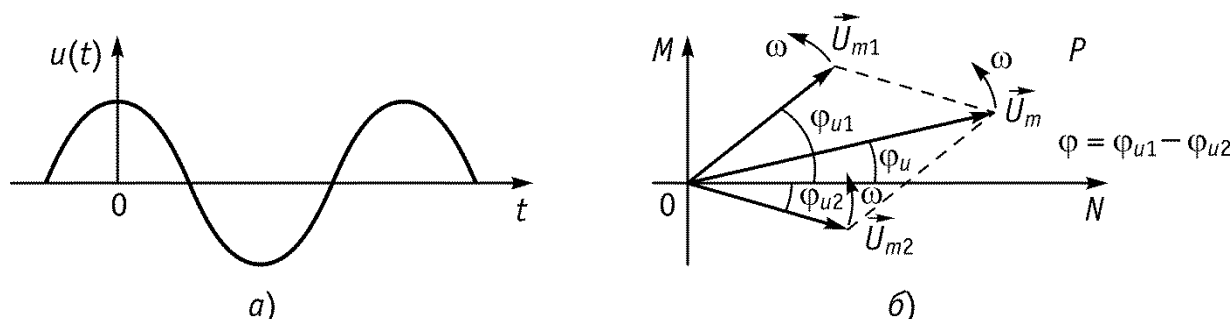


Рис. 3.2

Совокупность векторов, изображающих гармоническое колебание в электрической цепи, называют векторной диаграммой.

Замечание. За положительное направление вращения векторов принимается направление против часовой стрелки.

2. Представление комплексными числами. Это представление лежит в основе символического метода расчета – **метода комплексных амплитуд**.

Представление гармонических колебаний комплексными числами может быть в следующих формах:

а) **в тригонометрической форме**

$$\underline{u}(t) = U_m [\cos(\omega t + \varphi_u) + j \sin(\omega t + \varphi_u)];$$

б) **в показательной форме**

$$\underline{u}(t) = U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)} = U_m e^{j\varphi_u} \cdot e^{j\omega t} = \underline{U}_m e^{j\omega t},$$

где $\underline{U}_m = U_m e^{j\varphi_u}$ – комплексная амплитуда (для тока аналогично).

Изобразить комплексную величину можно в виде вектора $\vec{U}_m$ на комплексной плоскости S .

Комплексную амплитуду можно представить в показательной, тригонометрической и алгебраической формах

$$\underline{U}_m = U_m e^{j\varphi_u}; \underline{U}_m = U_m \cos \varphi_u + j U_m \sin \varphi_u; \underline{U}_m = A + jB. \quad (3.10)$$

Замечание. Переход от алгебраической комплексной формы к показательной (и наоборот) осуществляется по формуле Эйлера ($e^{\pm j\varphi} = \cos \varphi \pm j \sin \varphi$)

$$\underline{U}_m = U_m \cdot e^{j\varphi_u} = U_m \cdot \cos \varphi_u + j U_m \sin \varphi_u = A + jB = \sqrt{A^2 + B^2} e^{j \arctg B/A}. \quad (3.11)$$

Действия над комплексными числами

1. **Сложение** (только в алгебраической форме)

$$\underline{U}_1 = A_1 + jB_1, \underline{U}_2 = A_2 + jB_2, \quad (3.12)$$

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = A_1 + jB_1 + A_2 + jB_2 = (A_1 + A_2) + j(B_1 + B_2) = A + jB. \quad (3.13)$$

2. **Вычитание** (только в алгебраической форме)

$$\underline{U} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2 = (A_1 - A_2) + j(B_1 - B_2) = A' + jB'. \quad (3.14)$$

3. **Умножение** (как в показательной, так и в алгебраической формах):

а) **в алгебраической форме**

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_1 \cdot \underline{U}_2 = (A_1 + jB_1) \cdot (A_2 + jB_2) = \\ &= (A_1 A_2 - B_1 B_2) + j(B_1 A_2 + B_2 A_1) = A + jB; \end{aligned} \quad (3.15)$$

б) **в показательной форме**

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_1 \cdot \underline{U}_2 = (A_1 + jB_1)(A_2 + jB_2) = U_{m1} e^{j\varphi_{u1}} U_{m2} e^{j\varphi_{u2}} = \\ &= U_{m1} U_{m2} e^{j(\varphi_{u1} + \varphi_{u2})} = U e^{j\varphi_u}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

4. **Деление** (как в показательной, так и в алгебраической формах):

а) **в алгебраической форме**

$$\underline{U} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{(A_1 + jB_1) \cdot (A_2 - jB_2)}{(A_2 + jB_2) \cdot (A_2 - jB_2)} = \frac{(A_1 A_2 + B_1 B_2) + j(B_1 A_2 - A_1 B_2)}{A_2^2 + B_2^2} = U_1 + jU_2; \quad (3.17)$$

б) **в показательной форме**

$$\underline{U} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{U_{m1} e^{j\varphi_{u1}}}{U_{m2} e^{j\varphi_{u2}}} = \frac{U_{m1}}{U_{m2}} e^{j(\varphi_{u1} - \varphi_{u2})} = U e^{j\varphi_u}. \quad (3.18)$$

5. **Дифференцирование** (рассмотрим только в показательной форме)

$$\frac{d(\underline{u}(t))}{dt} = \frac{d(U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)})}{dt} = j\omega \cdot U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}. \quad (3.19)$$

Видно, что дифференцирование по времени комплексной функции (от аргумента ωt), представленной в показательной форме, приводит только к умножению на $j\omega$.

6. **Интегрирование** (рассмотрим только в показательной форме)

$$\int_{-\infty}^t \underline{u}(t) dt = \int_{-\infty}^t U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)} dt = \frac{1}{j\omega} U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}. \quad (3.20)$$

Видно, что интегрирование по времени комплексной функции (от аргумента ωt), представленной в показательной форме, приводит только к делению на $j\omega$.

Некоторые полезные сведения

$$j = \sqrt{-1}; j^2 = -1; 1/j = -j; j = e^{j\pi/2} = e^{j90^\circ}; -1 = e^{j\pi} = \cos \pi + j \sin \pi = -1. \quad (3.21)$$

Последовательное соединение R , L , C элементов при воздействии гармонического колебания. Закон Ома, Законы Кирхгофа. Активное, реактивное, полное сопротивление

Пусть имеется электрическая схема (рис. 3.3), состоящая из последовательного соединения источника напряжения гармонических колебаний, резистивного сопротивления R , емкости C и индуктивности L . Запишем закон Кирхгофа (ЗНК) для мгновенных значений

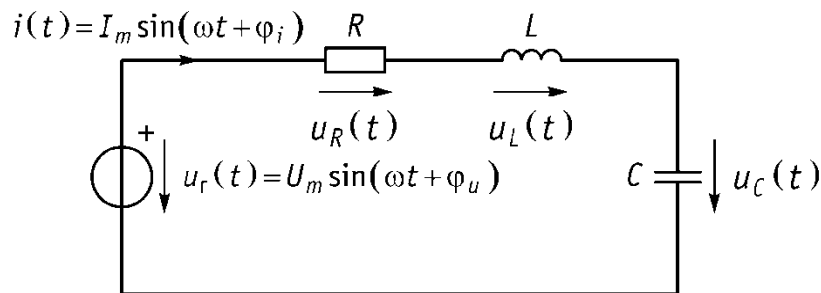


Рис. 3.3

$$\begin{aligned} u_r(t) &= u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = i(t) \cdot R + \frac{di(t)}{dt} \cdot L + \frac{1}{C} \int i(t) dt = \\ &= \underbrace{I_m R \sin(\omega t + \varphi_i)}_{U_{mR}} + \underbrace{L I_m \omega \cos(\omega t + \varphi_i)}_{U_{mL}} + \left(\underbrace{-\frac{1 \cdot I_m}{C \omega} \cos(\omega t + \varphi_i)}_{U_{mC}} \right) = \\ &= U_{mR} \sin(\omega t + \varphi_i) + U_{mL} \sin\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right) + U_{mC} \sin\left(\omega t + \underbrace{\varphi_i - \frac{\pi}{2}}_{\varphi_{UC}}\right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Из формулы видно, что фаза напряжения на сопротивлении φ_{uR} совпадает с фазой тока φ_i , протекающего через это сопротивление. Фаза напряжения на индуктивности φ_{uL} опережает на $\pi/2$ фазу тока φ_i . Фаза напряжения на емкости φ_{uC} отстает на $\pi/2$ от фазы тока φ_i .

В полученном выражении:

$U_{mR} = I_m \cdot R = U_{ma}$ – амплитуда активной составляющей напряжения цепи;

$U_{mL} = \omega L \cdot I_m = X_L \cdot I_m$ – амплитуда напряжения на индуктивности;

$U_{mC} = 1/(\omega C) \cdot I_m = X_C \cdot I_m$ – амплитуда напряжения на емкости;

$U_{mLC} = U_{mL} - U_{mC} = I_m (X_L - X_C) = I_m \cdot X_p = U_{mp}$ – реактивная составляющая напряжения в цепи;

$X_L = \omega L$ – индуктивное сопротивление;

$X_C = 1/(\omega C)$ – емкостное сопротивление;

$X = X_L - X_C$ – реактивное сопротивление цепи;

$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ – полное сопротивление цепи.

Единицы измерения сопротивлений (Ом).

Векторная диаграмма напряжений

Векторная диаграмма (рис. 3.4) представляется в соответствии с полученными уравнениями.

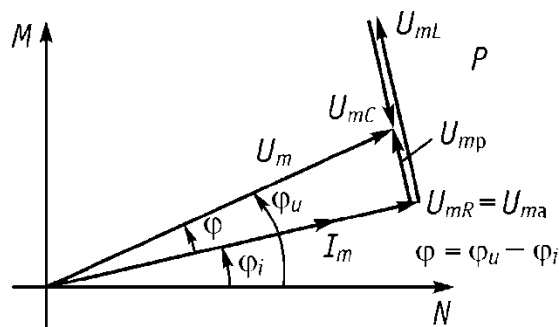


Рис. 3.4

1. Если $U_{mC} < U_{mL}$ ($X_C < X_L$), то фаза напряжения в цепи опережает фазу тока ($\varphi = \varphi_u - \varphi_i > 0$) – цепь носит индуктивный характер.

2. Если $U_{mC} > U_{mL}$ ($X_C > X_L$), то цепь носит емкостной характер, напряжение отстает по фазе от тока на угол

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i < 0.$$

Законы Ома и Кирхгофа для комплексных амплитуд

Запишем закон напряжений Кирхгофа для комплексных амплитуд, для этого в уравнении для мгновенных значений перейдем от мгновенных значений напряжения и тока к комплексной показательной форме напряжения и тока ($i(t) \rightarrow I_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)}$, $u(t) \rightarrow U_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}$), тогда для уравнения (3.22) получим

$$U_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)} = I_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)} R + j\omega L I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} - j \frac{1}{\omega C} I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}.$$

Откуда получим **закон напряжений Кирхгофа для комплексных амплитуд**

$$\underline{U}_m = \underline{I}_m \cdot R + jX_L \cdot \underline{I}_m - jX_C \cdot \underline{I}_m = \underline{I}_m (R + j(X_L - X_C)) = \underline{I}_m (R + jX) = \underline{I}_m \cdot \underline{Z},$$

где $\underline{Z}_L = 0 + j\omega L = 0 + jX_L$ – комплексное индуктивное сопротивление;

$\underline{Z}_C = 0 - j\frac{1}{\omega C} = 0 + \frac{1}{j\omega C} = 0 - jX_C$ – комплексное емкостное сопротивление;

$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi_Z} = R + jX = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} e^{j \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}}$ – комплексное сопротивление всей цепи; $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}$ – полное сопротивление цепи. Единицы измерения сопротивлений Ом.

Закон Ома в комплексной форме имеет вид

$$\underline{I}_m = \underline{U}_m / \underline{Z} = \underline{U}_m \underline{Y}, \quad (3.23)$$

где $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2} = G - jB$ – комплексная проводимость цепи; G – активная проводимость цепи, B – реактивная проводимость цепи. Единица измерения проводимости сименс (См).

Параллельное соединение R , L , C элементов

Пусть имеется электрическая схема (рис. 3.5), состоящая из параллельно соединенных R , L , C элементов и источника гармонического напряжения $u_r(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$. Получим основные соотношения между токами и напряжениями, определим проводимость цепи, построим треугольники токов и проводимостей.

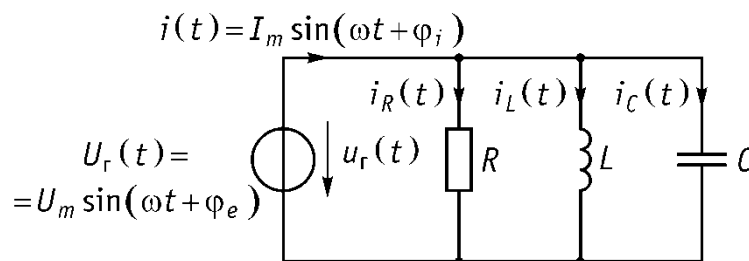


Рис. 3.5

Закон токов Кирхгофа (ЗТК) для мгновенных значений

$$\begin{aligned} i(t) &= i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) = \\ &= \frac{U_m \sin(\omega t + \varphi_u)}{R} + \frac{1}{L} \int U_m \sin(\omega t + \varphi_u) dt + C \frac{d(U_m \sin(\omega t + \varphi_u))}{dt} = \\ &= \frac{U_m \sin(\omega t + \varphi_u)}{R} - \frac{1}{\omega L} U_m \cos(\omega t + \varphi_u) + \omega C U_m \cos(\omega t + \varphi_u) = \\ &= I_{mR} \sin(\omega t + \varphi_u) - I_{mL} \cos(\omega t + \varphi_u) + I_{mC} \cos(\omega t + \varphi_u) = \\ &= I_{mR} \sin(\omega t + \varphi_{iR}) + I_{mL} \underbrace{\sin\left(\omega t + \varphi_u - \frac{\pi}{2}\right)}_{\varphi_{iL}} + I_{mC} \underbrace{\sin\left(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}\right)}_{\varphi_{iC}}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где $\varphi_u = \varphi_{i_R}$; $\varphi_{i_L} = \varphi_u - \pi/2$; $\varphi_{i_C} = \varphi_u + \pi/2$; $I_{mR} = I_{ma} = U_m/R$ – амплитуда активной составляющей тока в цепи; $I_{mp} = I_{mC} - I_{mL}$ ($I_{mC} = U_m \cdot \omega C$, $I_{mL} = U_m/(\omega L)$) – амплитуда реактивной составляющей тока; $1/R = G$ – активная проводимость; $\omega C = B_C$ – проводимость емкостного элемента; $1/(\omega L) = B_L$ – проводимость индуктивного элемента.

Из уравнения видно, что фаза φ_{i_R} тока, протекающего через сопротивление R , совпадает с фазой φ_u приложенного напряжения ($\varphi_{i_R} = \varphi_u$).

Фаза φ_{i_L} тока, протекающего через индуктивный элемент, отстает на угол $\pi/2$ от фазы φ_u приложенного напряжения ($\varphi_{i_L} = \varphi_u - \pi/2$).

Фаза φ_{i_C} тока, протекающего через емкость, опережает на $\pi/2$ фазу φ_u приложенного напряжения ($\varphi_{i_C} = \varphi_u + \pi/2$).

Векторная диаграмма токов. Диаграмма строится в соответствии с уравнением ЗТК. Фазы векторов тока, как правило, отсчитывают от положения вектора приложенного напряжения (рис. 3.6).

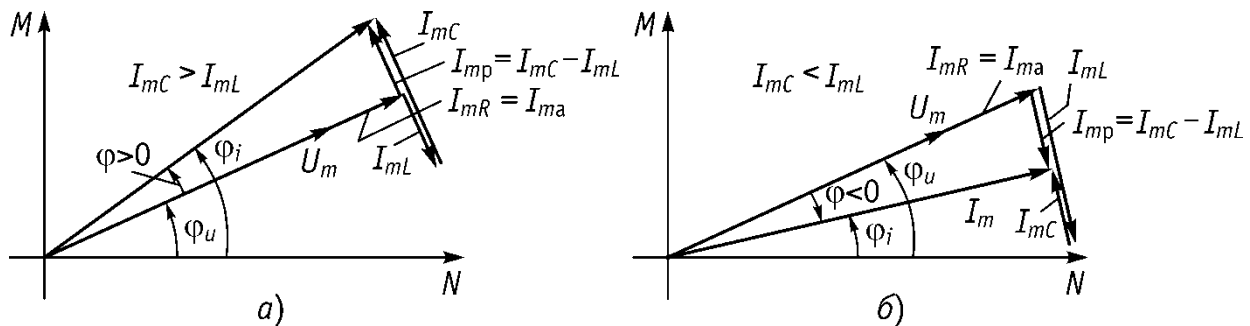


Рис. 3.6

На рис. 3.6 а проводимость цепи носит емкостной характер.

На рис. 3.6 б проводимость цепи носит индуктивный характер.

Закон токов Кирхгофа для комплексных амплитуд. Представим токи в ветвях $i(t)$ и напряжение $u(t)$ в комплексной показательной форме $\underline{i}(t) = I_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)}$, $\underline{u}(t) = U_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}$, подставим их в уравнение ЗТК для мгновенных значений и перейдем к комплексным амплитудам, получим закон токов для комплексных амплитуд

$$\underline{I}_m = \underline{I}_{mR} - j\underline{I}_{mL} + j\underline{I}_{mC}. \quad (3.25)$$

Закон Ома для комплексных амплитуд

$$\underline{I}_m = \underline{U}_m G + j\underline{U}_m \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = \underline{U}_m (G + jB) = \underline{U}_m \underline{Y} = \underline{U}_m Y e^{j \arctg \frac{B}{G}}, \quad (3.26)$$

где $\underline{Y} = G + jB$ – комплексная проводимость цепи; $Y = \sqrt{G^2 + B^2}$ – полная проводимость; G – активная проводимость цепи; B – реактивная проводимость цепи. Единица измерения проводимостей (См).

Лекция 5

Методы анализа цепей при воздействии гармонических колебаний

При гармоническом воздействии используются те же методы расчета, что и при расчете линейных цепей при постоянном токе: метод свертывания, метод наложения, метод контурных токов, метод законов Кирхгофа (ЗТК и ЗНК), метод узловых напряжений и метод эквивалентного генератора. Рассмотрим только три последних метода.

Метод законов Кирхгофа. Пусть имеется электрическая схема, приведенная на рис. 3.7. Необходимо определить токи в ветвях и напряжения на элементах.

Порядок расчета

1. Обозначаем узлы ①, ②, ③.
2. Обозначаем токи в ветвях $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, $i_4(t)$, $i_5(t)$ (заметим, что $i_5(t) = J(t)$).

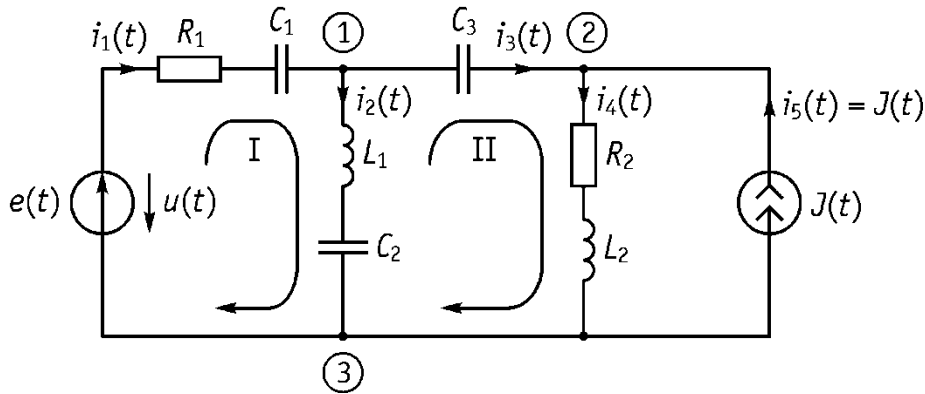


Рис. 3.7

3. Выбираем независимые контуры I и II и выбираем направления обхода контуров (произвольно).
4. Записываем уравнения ЗТК для комплексных амплитуд

$$\text{узел 1: } -\underline{I}_{m1} + \underline{I}_{m2} + \underline{I}_{m3} = 0; \quad (3.27)$$

$$\text{узел 2: } -\underline{I}_{m3} + \underline{I}_{m4} - \underline{I}_{m5} = 0. \quad (3.28)$$

5. Записываем уравнения ЗНК для 1-го и 2-го контуров

$$\text{контур I: } -\underline{U}_{mг} + \underline{I}_{m1} \left(R_1 - j \frac{1}{\omega C_1} \right) + \underline{I}_{m2} \left(j\omega L_1 - j \frac{1}{\omega C_2} \right) = 0; \quad (3.29)$$

$$\text{контур II: } -\underline{I}_{m2} \cdot j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_2} \right) + \underline{I}_{m3} \left(-j \frac{1}{\omega C_3} \right) + \underline{I}_{m4} (R_2 + j\omega L_2) = 0. \quad (3.30)$$

6. Решаем совместно полученную систему ЗТК и ЗНК относительно неизвестных токов $\underline{I}_{m1}$, $\underline{I}_{m2}$, $\underline{I}_{m3}$, $\underline{I}_{m4}$ с помощью определителей

$$\underline{I}_{m1} = \underline{\Delta}_i / \underline{\Delta}. \quad (3.31)$$

7. Зная токи в ветвях, определяем напряжения на элементах, используя закон Ома.

8. После нахождения токов и напряжений для комплексных амплитуд, переходим к мгновенным (реальным) значениям токов и напряжений ($i(t) = \text{Im}(\underline{I}_m)$, если $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$ и $i(t) = \text{Re}(\underline{I}_m)$, если $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$).

Метод узловых напряжений. Пусть имеется электрическая схема, приведенная на рис. 3.8. Необходимо определить токи в ветвях и напряжения на элементах схемы.

Порядок расчета

1. Обозначим узлы ①, ②, ③ и их напряжения U_1, U_2, U_3 .
2. Обозначаем токи в ветвях $i_1(t), i_2(t), i_3(t), i_4(t), i_5(t)$ (заметим, что $i_5(t) = J(t)$).

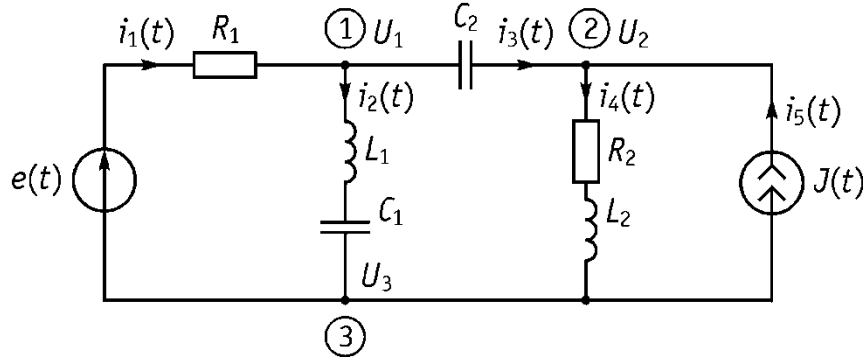


Рис. 3.8

3. Выбираем узел ③ в качестве базисного узла (поскольку в схеме нет идеального источника напряжения, то можно выбрать любой узел) и приравниваем напряжение этого узла к нулю ($U_3 = 0$).

4. Записываем для узлов ①, ② уравнения ЗТК для комплексных амплитуд

$$\text{узел 1: } -\underline{I}_{m1} + \underline{I}_{m2} + \underline{I}_{m3} = 0; \quad (3.32)$$

$$\text{узел 2: } -\underline{I}_{m3} + \underline{I}_{m4} - \underline{I}_{m5} = 0. \quad (3.33)$$

5. Находим токи в ветвях для комплексных амплитуд через узловые напряжения, используя закон Ома для участка цепи

$$\underline{I}_{m1} = \frac{\underline{U}_{m3} - \underline{U}_{m1} + \underline{E}_m}{R_1} = \frac{\underline{U}_{m1} + \underline{E}_m}{R_1}, \quad \underline{I}_{m2} = \frac{\underline{U}_{m1} - \underline{U}_{m3}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{\underline{U}_{m1}}{j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C_1}\right)}, \quad (3.34)$$

$$\underline{I}_{m3} = \frac{\underline{U}_{m1} - \underline{U}_{m2}}{1/(j\omega C_2)}, \quad \underline{I}_{m4} = \frac{\underline{U}_{m2} - \underline{U}_{m3}}{R + j\omega L_2} = \frac{\underline{U}_{m2}}{R + j\omega L_2}. \quad (3.35)$$

6. Подставим полученные уравнения для токов в ЗТК и перенесем в левую часть – неизвестные, в правую – известные слагаемые, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \underline{U}_{m1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)} + \frac{1}{j\omega C_2} \right) - \underline{U}_{m2} \left(\frac{1}{j\omega C_2} \right) = \frac{\underline{E}_m}{R_1} = \underline{I}_{my1}, \\ -\underline{U}_{m1} \left(\frac{1}{1/(j\omega C_2)} \right) + \underline{U}_{m2} \left(\frac{1}{1/(j\omega C_2)} + \frac{1}{R_2 + j\omega L_2} \right) = \underline{J}_m = \underline{I}_{my2}. \end{cases} \quad (3.36)$$

Или

$$\begin{cases} \underline{U}_{m1} \cdot \underline{Y}_{11} - \underline{U}_{m2} \cdot \underline{Y}_{12} = \underline{I}_{my1}, \\ -\underline{U}_{m1} \cdot \underline{Y}_{21} + \underline{U}_{m2} \cdot \underline{Y}_{22} = \underline{I}_{my2}. \end{cases} \quad (3.37)$$

В общем виде для $(k+1)$ узлов:

$$\begin{cases} \underline{U}_{m1} \cdot \underline{Y}_{11} - \underline{U}_{m2} \cdot \underline{Y}_{12} - \dots - \underline{U}_{mk} \cdot \underline{Y}_{1k} = \underline{I}_{my1}, \\ -\underline{U}_{m1} \cdot \underline{Y}_{21} + \underline{U}_{m2} \cdot \underline{Y}_{22} - \dots - \underline{U}_{mk} \cdot \underline{Y}_{2k} = \underline{I}_{my2}, \\ \dots \\ -\underline{U}_{m1} \cdot \underline{Y}_{k1} - \underline{U}_{m2} \cdot \underline{Y}_{k2} - \dots + \underline{U}_{mk} \cdot \underline{Y}_{kk} = \underline{I}_{myk}, \end{cases} \quad (3.38)$$

где $\underline{Y}_{ii}$ – собственные комплексные проводимости узлов, равные сумме комплексных проводимостей всех ветвей, подключенных к i -му узлу; $\underline{Y}_{ij}$ – взаимная комплексная проводимость между i -м и j -м узлами, равная сумме проводимостей всех ветвей, подключенных к i -му и j -му узлам ($i = 1 \dots k, j = 1 \dots k, i \neq j$).

7. Решаем полученную систему уравнений относительно неизвестных напряжений с помощью определителей

$$\underline{U}_{mi} = \underline{\Delta}_i / \underline{\Delta}. \quad (3.39)$$

8. Зная узловые напряжения, определяем токи в ветвях и определяем напряжения на элементах.

Мгновенная, средняя, реактивная, комплексная и полная мощности в электрической цепи при гармоническом воздействии

Пусть имеется схема, состоящая из последовательно соединенных источника напряжения и элементов R, L, C (рис. 3.9).

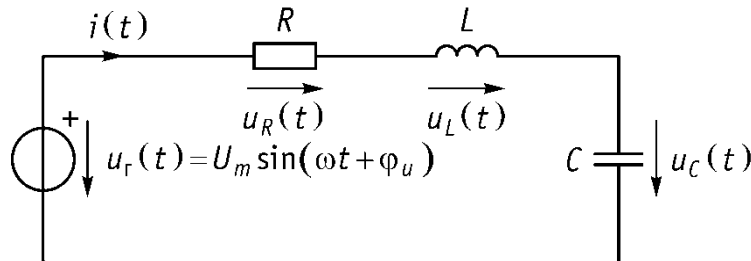


Рис. 3.9

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i), \quad u_R(t) = i(t)R, \quad u_L(t) = L \frac{di}{dt}, \quad u_C(t) = \frac{1}{C} \int i dt. \quad (3.40)$$

Мгновенная мощность в электрической цепи

$$\begin{aligned} p(t) &= u_r(t) \cdot i(t) = u_R(t) \cdot i(t) + u_L(t) \cdot i(t) + u_C(t) \cdot i(t) = \\ &= RI_m \sin(\omega t + \varphi_i) \cdot I_m \sin(\omega t + \varphi_i) + \omega LI_m \cos(\omega t + \varphi_i) \cdot I_m \sin(\omega t + \varphi_i) + \\ &\quad + \left(-\frac{1}{\omega C} \right) I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \cdot I_m \sin(\omega t + \varphi_1) = \\ &= RI_m^2 \frac{1}{2} (1 - \cos(2\omega t + 2\varphi_i)) + \omega LI_m^2 \frac{1}{2} \sin(2\omega t + 2\varphi_i) - \frac{I_m^2}{\omega C} \frac{1}{2} \sin(2\omega t + 2\varphi_i). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Средняя мощность в электрической цепи

$$\begin{aligned}
 P_{\text{ср}} &= \frac{1}{T} \int_0^T u_{\text{r}}(t) i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T R \cdot I_m^2 \frac{1}{2} (1 - \cos(2\omega t + 2\varphi_i)) dt + \\
 &+ \frac{1}{T} \int_0^T L\omega \cdot I_m^2 \frac{1}{2} \sin(2\omega t + 2\varphi_i) dt - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{I_m^2}{\omega C} \frac{1}{2} \sin(2\omega t + 2\varphi_i) dt = \\
 &= \underbrace{\frac{RI_m^2}{2}}_{P_{\text{ср}R}} - \frac{1}{T} \cdot \underbrace{RI_m^2 \int_0^T \cos(2\omega t + 2\varphi_i) dt}_0 + \underbrace{\frac{\omega LI_m^2}{2T} \int_0^T \sin(2\omega t + 2\varphi_i) dt}_0 - \\
 &- \underbrace{\frac{I_m^2}{\omega CT} \int_0^T \sin(2\omega t + 2\varphi_i) dt}_0 = \frac{RI_m^2}{2} = RI^2.
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Итак, $P_{\text{ср}} = P_{\text{a}} = RI^2$ – средняя мощность в цепи равна активной мощности.

Комплексная мощность в цепи. Если в уравнение для мгновенной мощности подставить комплексную амплитуду напряжений и комплексно-сопряженную амплитуду тока, тогда получим комплексную мощность

$$\begin{aligned}
 \underline{S} &= \frac{1}{2} \underline{U}_{mR} \cdot \underline{I}_m^* = \frac{1}{2} \underline{U}_{mR} \cdot \underline{I}_m^* + \frac{1}{2} \underline{U}_{mL} \cdot \underline{I}_m^* + \frac{1}{2} \underline{U}_{mC} \cdot \underline{I}_m^* = \\
 &= \frac{1}{2} RI_m \cdot e^{j\varphi_i} \cdot I_m e^{-j\varphi_i} + \frac{1}{2} j\omega LI_m \cdot e^{j\varphi_i} \cdot I_m e^{-j\varphi_i} - \frac{1}{2} j \frac{1}{\omega C} I_m \cdot e^{j\varphi_i} \cdot I_m e^{-j\varphi_i} = \\
 &= RI^2 + j\omega LI^2 - j \frac{1}{\omega C} \cdot I^2 = RI^2 + j \left(\omega LI^2 - \frac{I^2}{\omega C} \right) = P + j(Q_L - Q_C) = P + jQ = \tag{3.43} \\
 &= \sqrt{P^2 + Q^2} \cdot e^{j \arctg \frac{Q}{P}} = \sqrt{(I^2 R)^2 + \left(I^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right)^2} \cdot e^{j \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}} = \\
 &= I^2 \sqrt{R^2 + X^2} \cdot e^{j \arctg \frac{X}{R}} = I^2 \cdot Z \cdot e^{j\varphi} = U \cdot I \cos \varphi + jIU \sin \varphi = P + jQ.
 \end{aligned}$$

где $P = RI^2$ – активная мощность (Вт); $Q = Q_L - Q_C$ – реактивная мощность (единица измерения ВАР – вольт-ампер реактивная); $Q_L = \omega LI^2$; $Q_C = I^2 \cdot 1/(\omega C)$ – соответственно реактивные мощности в индуктивном и емкостном элементах.

Единица измерения комплексной мощности ($\underline{S}$) вольт-ампер (ВА).

$\cos \varphi$ – коэффициент мощности, характеризует потери при передаче энергии. Чем больше $\cos \varphi$, тем меньше потери в линии передачи.

Полная мощность есть модуль комплексной мощности

$$S = |\underline{S}| = |S \cdot e^{j\varphi}| = \left| \underbrace{S \cos \varphi}_P + j \underbrace{S \sin \varphi}_Q \right| = \sqrt{(UI \cos \varphi)^2 + (UI \sin \varphi)^2} = UI, \tag{3.44}$$

где $P = S \cos \varphi = \text{Re } \underline{S}$, $Q = S \sin \varphi = \text{Im } \underline{S}$ – активная и реактивная мощности.

Условия передачи максимальной активной мощности от источника гармонического напряжения в комплексную нагрузку

Пусть имеется схема, приведенная на рис. 3.10. Необходимо найти условие, при котором в нагрузке $\underline{Z}_H$ будет выделяться максимальная активная мощность.

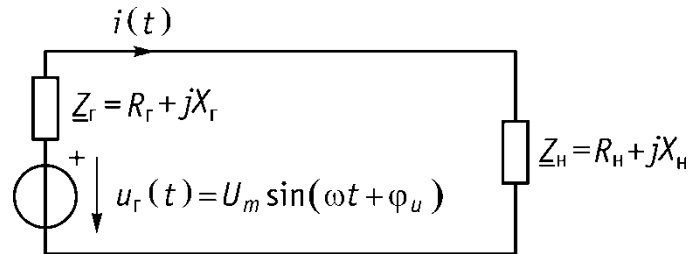


Рис. 3.10

Порядок расчета

1. Определяем активную мощность в нагрузке P_H .
2. Приравняем нулю производную от активной мощности по мнимой части сопротивления нагрузки и определим значение мнимой части (X_H) комплексной нагрузки $\underline{Z}_H$

$$X_H = -X_r. \quad (3.45)$$

3. Определяем значение активной части (R_H) комплексной нагрузки $\underline{Z}_H$, при которой мощность в нагрузке достигает максимум максимального значения

$$R_H = R_r. \quad (3.46)$$

Максимальное значение активной мощности при $X_H = -X_r$ и $R_H = R_r$ равно

$$P_{H \max \max} = \frac{U_r^2}{4R_r}. \quad (3.47)$$

Таким образом, чтобы от источника напряжения в комплексную нагрузку передавалась максимальная активная мощность, должны выполняться условия

- 1) $X_H = -X_r$,
- 2) $R_H = R_r$,

т.е. необходимо, чтобы сопротивление нагрузки было комплексно-сопряжено сопротивлению генератора $\underline{Z}_H = \underline{Z}_r^*$ (если $\underline{Z}_r = R_r + jX_r$, тогда $\underline{Z}_H = R_r - jX_r$).

Баланс мощности в электрической цепи при гармоническом воздействии

Уравнение баланса мощности можно получить из теоремы Телледжена в комплексной форме

$$\sum_{k=1}^{n_B} \underline{U}_k \underline{I}_k = 0, \quad (3.48)$$

в которую, вместо комплексного тока $\underline{I}_k$, необходимо подставить комплексно-сопряженный ток $\underline{I}_k^*$.

$$\sum_{k=1}^{n_B} \underline{U}_k \underline{I}_k^* = \sum_{k=1}^{n_B} \underline{S}_k = 0. \quad (3.49)$$

Если в последнем уравнении отделить слагаемые комплексных мощностей, относящиеся к источникам от слагаемых комплексных мощностей, относящихся к потребителям, тогда получим уравнение баланса в виде

$$\sum_{i=1}^{n_{\text{и}}} \underline{S}_{\text{ист}} = \sum_{j=1}^{n_{\text{п}}} \underline{S}_{\text{потр}}, \quad (3.50)$$

или

$$\sum_{i=1}^{n_{\text{и}}} (P_{\text{ист}} + jQ_{\text{ист}}) = \sum_{j=1}^{n_{\text{п}}} (P_{\text{потр}} + jQ_{\text{потр}}). \quad (3.51)$$

Откуда

$$\sum_{i=1}^{n_{\text{и}}} P_{\text{ист}} = \sum_{j=1}^{n_{\text{п}}} P_{\text{потр}}; \quad \sum_{i=1}^{n_{\text{и}}} Q_{\text{ист}} = \sum_{j=1}^{n_{\text{п}}} Q_{\text{потр}}, \quad (3.52)$$

где $n_{\text{и}}$ — количество источников, $n_{\text{п}}$ — количество потребителей.

Лекция 6

Электрические цепи с индуктивными связями

Два или более элемента цепи индуктивно связаны между собой, если при изменении тока, протекающего по одному элементу, в другом (других) возникает ЭДС. Пусть имеется две катушки (рис. 3.11), состоящие из одного витка провода (кольцо), имеющего диаметр D , и расположенных друг от друга на расстоянии l ($l < D$).

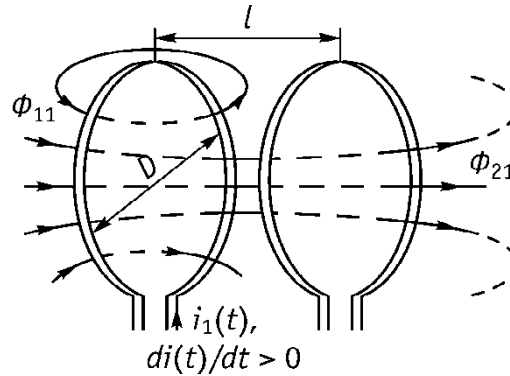


Рис. 3.11

Пусть по первому витку протекает ток $i_1(t)$. Этот ток создает магнитный поток самоиндукции Φ_{11} , который пронизывает первый виток. Часть этого потока Φ_{21} пронизывает второй виток. Этот поток называется магнитным потоком взаимной индукции первой и второй катушек.

Если ток будет протекать через вторую катушку, то аналогично появится магнитный поток самоиндукции второй катушки Φ_{22} , который полностью связан со второй катушкой и частично с первой через магнитный поток взаимной индукции второй и первой катушек Φ_{12} .

Потокоцепления самоиндукции Ψ_{11} , Ψ_{22} и взаимной индукции Ψ_{12} , Ψ_{21} при протекании тока по первой и второй катушкам соответственно равны

$$\Psi_{11} = w_1 \Phi_{11} = L_1 i_1, \quad \Psi_{21} = w_2 \Phi_{21} = M_{21} i_1; \quad (3.53)$$

$$\Psi_{22} = w_2 \Phi_{22} = L_2 i_2, \quad \Psi_{12} = w_1 \Phi_{12} = M_{12} i_2, \quad (3.54)$$

где w_1, w_2, L_1, L_2 – соответственно количество витков и индуктивности первой и второй катушек; M_{12}, M_{21} – взаимные индуктивности катушек (для взаимных магнитных цепей $M_{12} = M_{21} = M$).

Замечание. Положительное направление тока в катушке и магнитного потока самоиндукции определяют по правилу правого винта (рис. 3.12).

Степень индуктивной связи катушек с индуктивностями L_1 и L_2 определяется коэффициентом связи

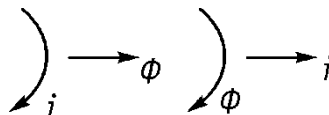


Рис. 3.12

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}, \quad 0 \leq k \leq 1. \quad (3.55)$$

Одноименные зажимы индуктивно-связанных катушек – это такие зажимы, относительно которых одинаково ориентированные токи порождают совпадающие по направлению магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции (рис. 3.13).

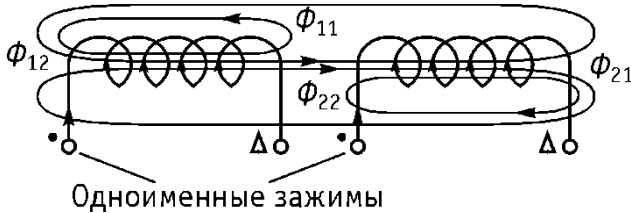


Рис. 3.13

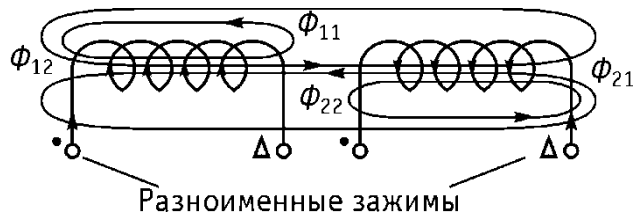


Рис. 3.14

Разноименные зажимы – зажимы, относительно которых одинаково ориентированные токи порождают несовпадающие по направлению магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции (рис. 3.14).

Экспериментально определить одноименные (разноименные) зажимы можно, используя схему (рис. 3.15): если при замыкании ключа, стрелка вольтметра отклоняется по часовой стрелке (в положительном направлении), то зажимы, к которым подключен «+» источника напряжения и «+» вольтметра – одноименные, в противном случае – разноименные.

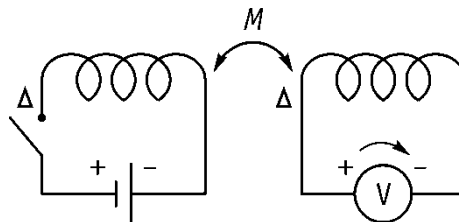


Рис. 3.15

Электродвижущие силы и напряжения самоиндукции ($e_{11}, e_{22}, u_{11}, u_{22}$) и взаимной индукции ($e_{21}, e_{12}, u_{21}, u_{12}$), а также ЭДС и напряжения на зажимах катушек при подведении возрастающих токов к одноименным и разноименным зажимам катушек соответственно равны

$$e_1(t) = e_{11}(t) + e_{12}(t) = -L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \mp M_{12} \frac{di_2(t)}{dt}, \quad (3.56)$$

$$e_2(t) = e_{22}(t) + e_{21}(t) = -L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \mp M_{21} \frac{di_1(t)}{dt}, \quad (3.57)$$

$$u_1(t) = u_{11}(t) + u_{12}(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \pm M_{12} \frac{di_2(t)}{dt}, \quad (3.58)$$

$$u_2(t) = u_{22}(t) + u_{21}(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \pm M_{21} \frac{di_1(t)}{dt}. \quad (3.59)$$

ЭДС и напряжение для комплексных действующих значений на катушках индуктивностей равны

$$\underline{E}_1 = -j\omega L_1 \underline{I}_1 \mp j\omega M \underline{I}_2, \quad \underline{E}_2 = -j\omega L_2 \underline{I}_2 \mp j\omega M \underline{I}_1, \quad (3.60)$$

$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 \pm j\omega M \underline{I}_2, \quad \underline{U}_2 = j\omega L_2 \underline{I}_2 \pm j\omega M \underline{I}_1. \quad (3.61)$$

Последовательное соединение индуктивно связанных элементов

Необходимо определить эквивалентное сопротивление, построить векторную диаграмму напряжений на элементах и тока в цепи.

А. Согласное соединение (включение) индуктивных элементов (ток входит в одноименные зажимы (рис. 3.16)).

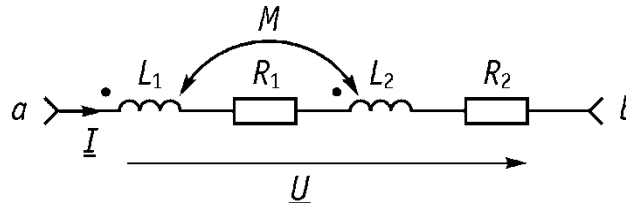


Рис. 3.16

Анализ

1. Составим уравнения ЗНК для цепи

$$\underline{I} \cdot j\omega L_1 + \underline{I} R_1 + j\omega M \underline{I}_1 + j\omega L_2 \underline{I} + R_2 \underline{I} + j\omega M \underline{I} - \underline{U} = 0, \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{I} (R_1 + j(\omega L_1 + \omega M)) + \underline{I} (R_2 + j(\omega L_2 + \omega M)) = \\ &= \underline{I} [(R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)] = \underline{I} (R_{\text{эс}} + j\omega L_{\text{эс}}) = \underline{I} \underline{Z}_{\text{эс}} = \underline{I} \cdot \underline{Z}_{\text{эс}} \cdot e^{j\varphi}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

где $R_{\text{эс}} = R_1 + R_2$ – эквивалентное сопротивление при согласном соединении (включении); $L_{\text{эс}} = L_1 + L_2 + 2M$ – эквивалентная индуктивность при согласном соединении (включении); $\underline{Z}_{\text{эс}} = R_{\text{эс}} + j\omega L_{\text{эс}}$ – комплексное сопротивление при согласном соединении (включении); $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \arctg(\omega L_{\text{эс}} / R_{\text{эс}}) > 0$.

2. В соответствии с уравнением ЗНК построим векторную диаграмму при согласном включении (рис. 3.17). Заметим, что в общем случае могут выполняться соотношения $L_1 < M$, $L_2 > M$ или $L_1 > M$, $L_2 < M$, но при этом всегда $L_1 \cdot L_2 > M^2$.

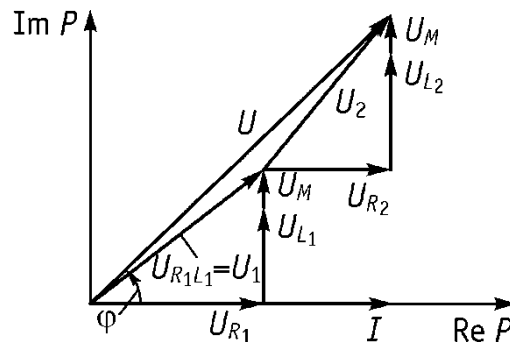


Рис. 3.17

Б. Встречное соединение (включение) индуктивных элементов (ток входит в разноименные зажимы (рис. 3.18)).

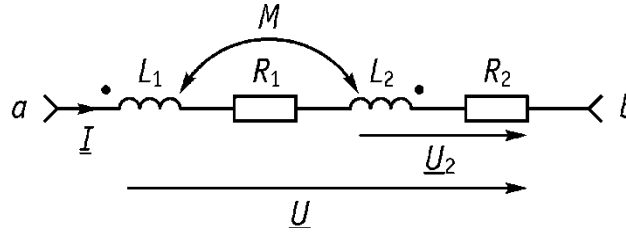


Рис. 3.18

Анализ

1. Составляем уравнение ЗНК

$$-\underline{U} + \underline{I}j\omega L_1 - \underline{I}j\omega M + \underline{I}R_1 + \underline{I}j\omega L_2 - \underline{I}j\omega M + \underline{I}R_2 = 0. \quad (3.64)$$

$$\underline{U} = \underline{I}(R_1 + R_2) + \underline{I}j\omega(L_1 + L_2 - 2M) = \underline{I}(R_{\text{эв}} + j\omega L_{\text{эв}}) = \underline{I} \cdot \underline{Z}_{\text{эв}} = \underline{I} \cdot \underline{Z}_{\text{эв}} \cdot e^{j\varphi}, \quad (3.65)$$

где $R_{\text{эв}} = R_1 + R_2$ – эквивалентное сопротивление цепи; $L_{\text{эв}} = L_1 + L_2 - 2M$ – эквивалентная индуктивность при встречном включении; $\underline{Z}_{\text{эв}} = R_{\text{эв}} + j\omega L_{\text{эв}} = R_{\text{эв}} + jX_{\text{эв}}$ – полное комплексное эквивалентное сопротивление при встречном соединении;

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \arctg \frac{\omega(L_1 + L_2 - 2M)}{R_1 + R_2}. \quad (3.66)$$

Замечание. Если $L_2 < M$ ($L_1 < M$), то в цепи на участке L_2, R_2 (L_1, R_1) может возникать «емкостной эффект», т.е. ток на этом участке будет опережать по фазе напряжение. Например, для $L_2 < M$

$$\underline{U}_2 = \underline{I}(R_2 + j(L_2 - M)\omega), \quad (3.67)$$

$$\underline{U}_2 = \underline{I} \cdot \underline{Z}_2 \cdot e^{j\varphi_2}, \quad \varphi_2 = \varphi_{u_2} - \varphi_i = -\arctg \frac{(M - L_2)\omega}{R_2} \quad (3.68)$$

– появляется «емкостный эффект».

Однако вся цепь всегда носит индуктивный характер, так как $L_1 + L_2 > 2M$.

2. В соответствии с уравнением ЗНК построим векторную диаграмму при согласном включении (рис. 3.19).

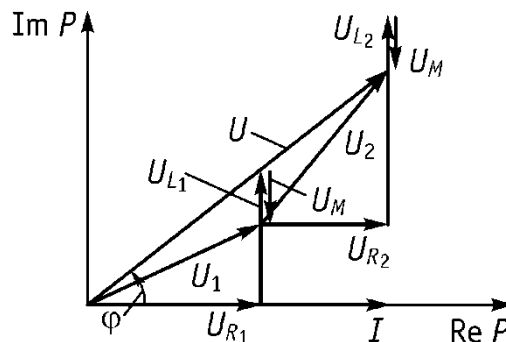


Рис. 3.19

Методы анализа электрических цепей с индуктивными связями. Трансформаторы

При расчете цепей с индуктивными связями непосредственно применяются метод законов Кирхгофа и метод контурных токов. Другие методы расчета (метод узловых напряжений, метод эквивалентного генератора, эквивалентное преобразование схем) могут быть использованы после развязки индуктивных связей.

При анализе методом законов Кирхгофа и наличии взаимной индукции между k -м и l -м элементами цепи знак напряжения взаимной индукции на элементе k выбирается «+», если направление обхода k -го элемента и направление тока в l -м элементе одинаковы относительно одноименных зажимов, в противном случае берется знак «-».

Развязка индуктивных связей

1. *Индуктивно связанные катушки соединены в узле одноименными зажимами.* При развязке взаимная индуктивность M вносится со знаком «-» в ветви 1 и 2, содержащие индуктивности L_1 и L_2 и со знаком «+» в ветвь 3 (рис. 3.20 а).

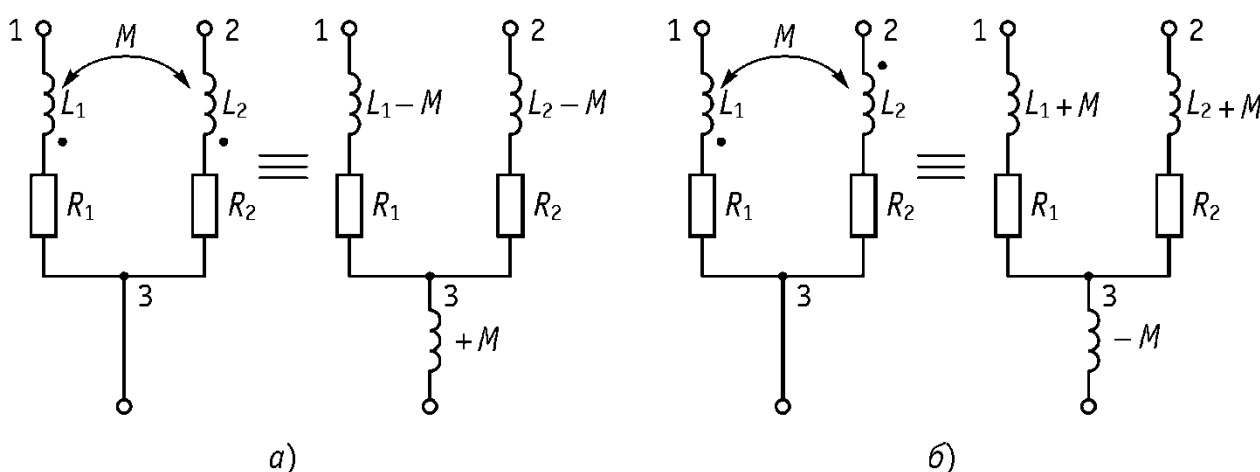


Рис. 3.20

2. *Индуктивно связанные катушки соединены в узле разноименными зажимами.* При развязке взаимная индуктивность M вносится со знаком «+» в ветви, содержащие индуктивность L_1 , L_2 и со знаком «-» в ветвь 3 (рис. 3.20 б).

Трансформаторы

Трансформатор – устройство, предназначенное для преобразования токов, напряжений и сопротивлений.

Простейший трансформатор содержит две индуктивно связанные катушки с индуктивностями L_1 и L_2 , расположенные на одном сердечнике, выполненном либо из ферромагнитного материала, либо из не ферромагнитного материала, в последнем случае трансформатор называется **воздушным**.

Катушка, к зажимам которой подключается источник энергии, называется **первичной**, а катушка, к зажимам которой подключается нагрузка, называется **вторичной**.

Воздушный трансформатор. Электрическая схема воздушного трансформатора изображена на рис. 3.21.

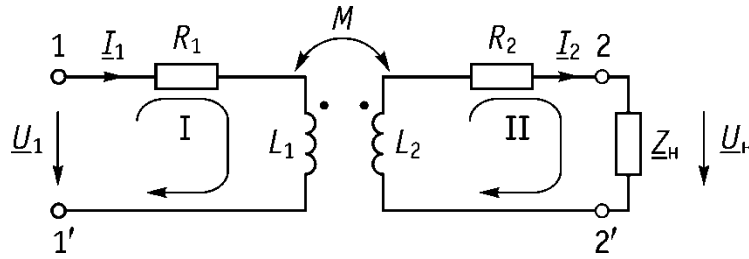


Рис. 3.21

Цель анализа: определить токи $\underline{I}_1, \underline{I}_2$, комплексное сопротивление контуров, найти схемы замещения, установить свойства трансформатора.

Анализ

1. Выделяем контуры I и II, выбираем обход контуров (например, по часовой стрелке).

2. Записываем уравнения ЗНК для контуров

$$\text{контур I: } \underline{U}_1 = \underline{I}_1(R_1 + j\omega L_1) - j\omega M \underline{I}_2 = \underline{I}_1 \underline{Z}_{11} - \underline{I}_2 \underline{Z}_{12}, \quad (3.69)$$

$$\text{контур II: } 0 = \underline{I}_2(R_2 + \underline{Z}_H + j\omega L_2) - \underline{I}_1 j\omega M = -\underline{I}_1 \underline{Z}_{21} + \underline{I}_2 \underline{Z}_{22}. \quad (3.70)$$

3. Решаем уравнения и определяем токи $\underline{I}_1, \underline{I}_2$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1 \underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{11} \cdot \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}^2} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{11} - \frac{\underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_{22}}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{1\text{BH}}}, \quad (3.71)$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_1 \underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{11} \cdot \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}^2} = \frac{\underline{U}_1 \cdot \frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{11}}}{\underline{Z}_{22} - \frac{\underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_{11}}} = \frac{\underline{U}_1 \cdot \frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{11}}}{\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{2\text{BH}}}, \quad (3.72)$$

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}. \quad (3.73)$$

где $\underline{Z}_{1\text{BH}}$, $\underline{Z}_{2\text{BH}}$ – вносимые сопротивления соответственно в первый и второй контуры за счет индуктивной связи.

4. Определяем сопротивления ветвей

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{1\text{BH}} = R_{11} + jX_{11} + R_{1\text{BH}} - jX_{1\text{BH}}, \quad (3.74)$$

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{2\text{BH}} = R_{22} + jX_{22} + R_{2\text{BH}} - jX_{2\text{BH}}. \quad (3.75)$$

5. Одноконтурные схемы замещения (рис. 3.22) получаются на основе уравнений вида

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{1\text{BH}}}, \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_1 (\underline{Z}_{12} / \underline{Z}_{11})}{\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{2\text{BH}}}. \quad (3.76)$$

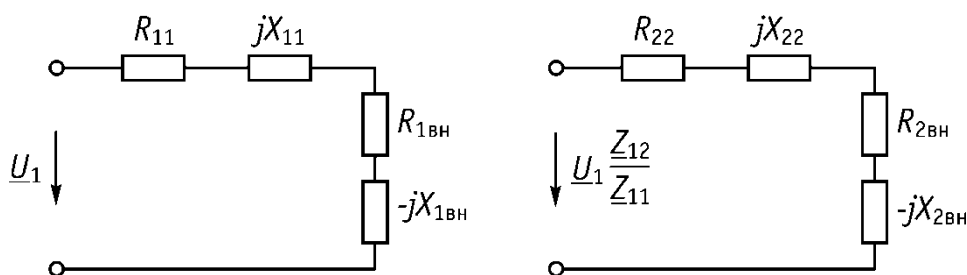


Рис. 3.22

6. Коэффициент трансформации трансформатора

$$n = \frac{w_1}{w_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}, \quad (3.77)$$

где w_1, w_2 – количество витков 1 и 2 катушек соответственно.

7. Входное сопротивление трансформатора

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_{22}} = R_1 + j\omega L_1 - \frac{(j\omega M)^2}{R_2 + R_{\text{н}} + j(\omega L_2 + X_{\text{н}})}. \quad (3.78)$$

Идеальный трансформатор – трансформатор, у которого: $L_1 = \infty, L_2 = \infty, M = \infty, M = \sqrt{L_1 L_2}, R_1 = 0, R_2 = 0$.

Трансформатор сопротивлений. Трансформатор сопротивлений – идеальный трансформатор, преобразующий сопротивление нагрузки. Идеальный трансформатор включается между источником энергии и нагрузкой, преобразовывает сопротивление нагрузки пропорционально квадрату коэффициента трансформации без изменения фазы нагрузки (рис. 3.23).

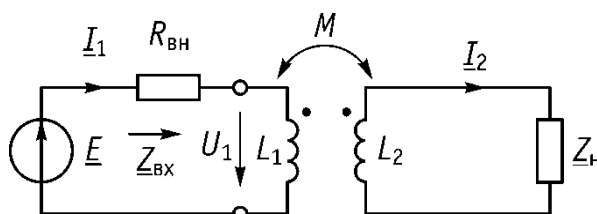


Рис. 3.23

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{U}{I} = R_1 + j\omega L_1 - \frac{(j\omega M)^2}{R_2 + jX_{\text{н}} + j\omega L_2 + R_{\text{н}}}. \quad (3.79)$$

Если $R_1 = 0, R_2 = 0, L_1 = \infty, L_2 = \infty$, тогда

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{L_1}{L_2} \cdot \underline{Z}_{\text{н}} = n^2 \cdot \underline{Z}_{\text{н}}, \quad \underline{Z}_{\text{вх}} = n^2 \cdot \underline{Z}_{\text{н}}. \quad (3.80)$$

Трансформатор сопротивлений используется для развязки по постоянному току и для согласования сопротивлений.

Трансформатор тока – идеальный трансформатор, имеющий сопротивление нагрузки, равное нулю $\underline{Z}_{\text{н}} = 0$

$$\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = n, \quad \underline{I}_2 = n \underline{I}_1. \quad (3.81)$$

Трансформатор напряжения – реализуется на основе идеального трансформатора, у которого сопротивление нагрузки равно бесконечности ($\underline{Z}_H = \infty$)

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = n, \quad \underline{U}_2 = \frac{1}{n} \underline{U}_1. \quad (3.82)$$

Примеры и задачи

Пример 1. Найти закон изменения тока $i_3(t)$ в схеме рис. 3.24, если известны токи $i_1(t) = 20 \sin(\omega t + 45^\circ)$ мА, $i_2(t) = 15 \sin(\omega t - 30^\circ)$ мА.

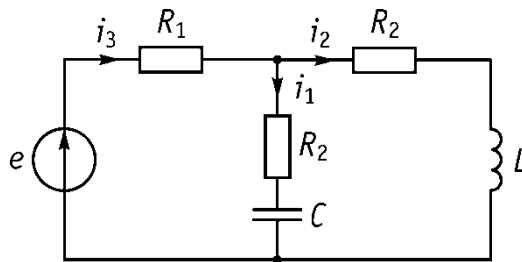


Рис. 3.24

Для расчета перейдем к комплексным амплитудным значениям токов

$$\underline{I}_{m1} = 20e^{j45^\circ} \text{ мА}, \quad \underline{I}_{m2} = 15e^{-j30^\circ} \text{ мА}.$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_{m3} &= \underline{I}_{m1} + \underline{I}_{m2} = 20 \cdot 10^{-3} e^{j45^\circ} + 15 \cdot 10^{-3} e^{-j30^\circ} = \\ &= 20 \cdot 10^{-3} (\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ) + 15 \cdot 10^{-3} (\cos(-30^\circ) + j \sin(-30^\circ)) = \\ &= (14,14 + j14,14) \cdot 10^{-3} + (12,99 - j7,5) \cdot 10^{-3} = \\ &= (14,14 + 12,99) \cdot 10^{-3} + j(14,14 - 7,5) \cdot 10^{-3} = (27,13 + j6,64) \cdot 10^{-3} = \\ &= 10^{-3} \sqrt{27,13^2 + 6,64^2} e^{j \arctg \frac{6,64}{27,13}} = 27,93 \cdot 10^{-3} e^{j13,8^\circ} \text{ А}. \end{aligned}$$

Вернемся к выражению для мгновенного значения

$$i_3(t) = 27,93 \sin(\omega t + 13,8^\circ) \text{ мА}.$$

Пример 2. Дана электрическая цепь (рис. 3.25). Найти закон изменения токов в ветвях. Построить векторную диаграмму токов. Рассчитать баланс мощности.

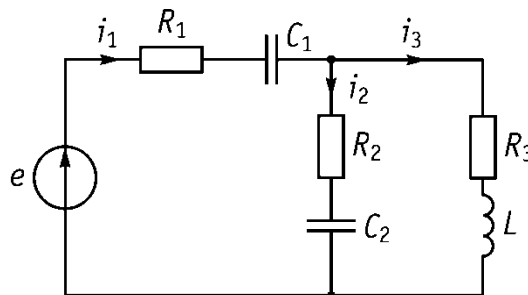


Рис. 3.25

$e(t) = 141 \sin(10^4 t + 45^\circ)$ В, $R_1 = 5$ кОм, $R_2 = 12$ кОм, $R_3 = 4,6$ кОм, $L = 0,8$ Гн, $C_1 = 10$ нФ, $C_2 = 16,67$ нФ.

Решение

Для расчета символическим методом определим:

– комплексное действующее значение источника

$$\underline{E} = \frac{141}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ} = 100 e^{j45^\circ} \text{ В};$$

– индуктивное сопротивление

$$X_L = \omega L = 10^4 \cdot 0,8 = 8 \cdot 10^3 \text{ Ом};$$

– емкостные сопротивления

$$X_{C_1} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{10^4 \cdot 10 \cdot 10^{-9}} = 10 \cdot 10^3 \text{ Ом};$$

$$X_{C_2} = \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{10^4 \cdot 16,67 \cdot 10^{-9}} = 6 \cdot 10^3 \text{ Ом};$$

– комплексные сопротивления ветвей $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$

$$\underline{Z}_1 = R_1 - jX_{C_1} = 5 \cdot 10^3 - j10 \cdot 10^3 = 11,18 \cdot 10^3 e^{-j63^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 - jX_{C_2} = 12 \cdot 10^3 - j6 \cdot 10^3 = 13,42 \cdot 10^3 e^{-j27^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + jX_L = 4,6 \cdot 10^3 + j8 \cdot 10^3 = 9,23 \cdot 10^3 e^{j60^\circ} \text{ Ом}.$$

В результате получили схему для символического метода расчета (рис. 3.26).

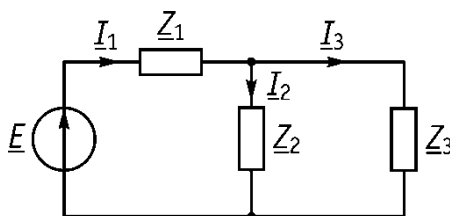


Рис. 3.26

Определим комплексные действующие значения токов, «свернув» схему к источнику

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{экв}} &= \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 5 \cdot 10^3 - j10 \cdot 10^3 + \frac{13,42 \cdot 10^3 e^{-j27^\circ} \cdot 9,23 \cdot 10^3 e^{j60^\circ}}{12 \cdot 10^3 - j6 \cdot 10^3 + 4,6 \cdot 10^3 + j8 \cdot 10^3} = \\ &= (5 - j10) \cdot 10^3 + \frac{123,8 \cdot 10^6 e^{j33^\circ}}{(16,6 + j2) \cdot 10^3} = (5 - j10) \cdot 10^3 + \frac{123,8 \cdot 10^3 e^{j33^\circ}}{16,72 e^{j7^\circ}} = \\ &= (5 - j10) \cdot 10^3 + 7,40 \cdot 10^3 e^{j26^\circ} = (5 - j10) \cdot 10^3 + (6,61 + j3,32) \cdot 10^3 = \\ &= (11,62 - j6,68) \cdot 10^3 = 13,4 \cdot 10^3 e^{-j30^\circ} \text{ Ом}. \end{aligned}$$

По закону Ома

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_{\text{экв}}} = \frac{100e^{j45^\circ}}{3,4 \cdot 10^3 e^{-j30^\circ}} = 7,46 \cdot 10^{-3} e^{j75^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 7,46 \cdot 10^{-3} e^{j75^\circ} \frac{9,23 \cdot 10^3 e^{j60^\circ}}{16,72 \cdot 10^3 e^{j7^\circ}} = 4,12 \cdot 10^{-3} e^{j128^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 7,46 \cdot 10^{-3} e^{j75^\circ} \frac{13,42 \cdot 10^3 e^{-j27^\circ}}{16,72 \cdot 10^3 e^{j7^\circ}} = 5,99 \cdot 10^{-3} e^{j41^\circ} \text{ А}.$$

Векторная диаграмма токов представлена на рис. 3.27.

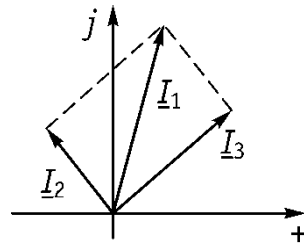


Рис. 3.27

Комплексная мощность источника:

$$\underline{S}_E = \underline{E} \cdot \underline{I}_1^* = 100e^{j45^\circ} \cdot 7,46 \cdot 10^{-3} e^{-j75^\circ} = 746 \cdot 10^{-3} e^{-j30^\circ} = (646 - j373) \text{ мВ} \cdot \text{А};$$

$$P_{\text{ист}} = 646 \text{ мВт}; \quad Q_{\text{ист}} = -373 \text{ мВар}.$$

Потребляемая активная мощность

$$\begin{aligned} \sum P_{\text{потр}} &= I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 = \\ &= (7,46 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 5 \cdot 10^3 + (4,12 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 12 \cdot 10^3 + (5,99 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 4,6 \cdot 10^3 = 647 \text{ мВт}. \end{aligned}$$

$$P_{\text{ист}} \approx P_{\text{потр}}.$$

Потребляемая реактивная мощность

$$\begin{aligned} \sum Q_{\text{потр}} &= -I_1^2 X_{C1} - I_2^2 X_{C2} + I_3^2 X_L = \\ &= -(7,46 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 10 \cdot 10^3 - (4,12 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 6 \cdot 10^3 + (5,99 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 8 \cdot 10^3 = -371 \text{ мВ} \cdot \text{Ар}. \end{aligned}$$

$$Q_{\text{ист}} \approx Q_{\text{потр}}.$$

Запишем выражения для мгновенных значений токов

$$i_1(t) = 7,46 \cdot 10^{-3} \sqrt{2} \sin(10^4 t + 75^\circ) = 10,55 \cdot 10^{-3} \sin(10^4 t + 75^\circ) \text{ А},$$

$$i_2(t) = 4,12 \cdot 10^{-3} \sqrt{2} \sin(10^4 t + 128^\circ) = 5,83 \cdot 10^{-3} \sin(10^4 t + 128^\circ) \text{ А},$$

$$i_3(t) = 5,99 \cdot 10^{-3} \sqrt{2} \sin(10^4 t + 41^\circ) = 8,41 \cdot 10^{-3} \sin(10^4 t + 41^\circ) \text{ А}.$$

Пример 3. Дана электрическая цепь, содержащая индуктивно-связанные катушки (рис. 3.28). Требуется:

1. Составить систему уравнений по законам Кирхгофа.
2. Выполнить развязку индуктивных связей.

Решение

1) Обозначим токи в ветвях и направления обхода контуров.

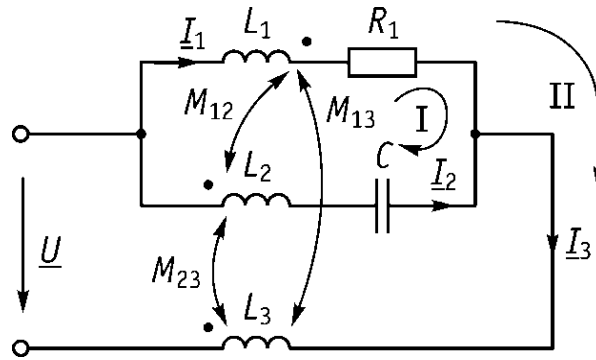


Рис. 3.28

$$\begin{cases} \underline{I}_1 + \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0 \\ \underline{I}_1 R_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M_{12} \underline{I}_2 + j\omega M_{13} \underline{I}_3 - \frac{1}{j\omega C} \underline{I}_2 - j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega M_{12} \underline{I}_1 + j\omega M_{23} \underline{I}_3 = 0 \\ \underline{I}_1 R_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M_{12} \underline{I}_2 + j\omega M_{13} \underline{I}_3 + j\omega L_3 \underline{I}_3 + j\omega M_{13} \underline{I}_1 - j\omega M_{23} \underline{I}_2 = \underline{U}. \end{cases}$$

2) Схема после развязки индуктивных связей представлена на рис. 3.29.

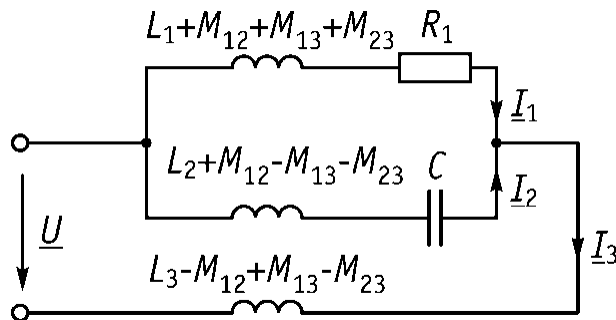


Рис. 3.29

ТЕМА 4. Комплексные передаточные функции и частотные характеристики линейных электрических цепей

Лекция 7

Комплексные передаточные функции. Резонансные цепи. Последовательный колебательный контур

Комплексная передаточная функция (КПФ) – отношение комплексной амплитуды реакции цепи к комплексной амплитуде воздействия. В зависимости от вида воздействия и вида реакции различают

1. КПФ по напряжению – отношение выходного напряжения $\underline{U}_2$ к входному напряжению $\underline{U}_1$

$$\underline{H}_u = \frac{\underline{U}_{2m}}{\underline{U}_{1m}} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \quad \text{или} \quad H_u(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} \quad (\text{величина безразмерная}). \quad (4.1)$$

2. КПФ по току – отношение выходного тока $\underline{I}_2$ к входному $\underline{I}_1$

$$\underline{H}_i = \frac{\underline{I}_{2m}}{\underline{I}_{1m}} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}, \quad H_i(j\omega) = \frac{I_2(j\omega)}{I_1(j\omega)} \quad (\text{величина безразмерная}). \quad (4.2)$$

3. Комплексное передаточное сопротивление – отношение выходного напряжения $\underline{U}_2$ к входному току $\underline{I}_1$

$$\underline{H}_R = \frac{\underline{U}_{2m}}{\underline{I}_{1m}} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1} \quad \text{или} \quad H_R(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{I_1(j\omega)} \quad (\text{Ом}). \quad (4.3)$$

4. Комплексную передаточную проводимость

$$\underline{H}_Y = \frac{\underline{I}_{2m}}{\underline{U}_{1m}} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1} \quad \text{или} \quad H_Y(j\omega) = \frac{I_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} \quad (\text{См}). \quad (4.4)$$

Кроме КПФ, рассмотренных выше, еще различают **комплексные входные функции**.

1. Комплексное входное сопротивление $\underline{Z}_{\text{вх}}$

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}, \quad Z_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{U_1(j\omega)}{I_1(j\omega)}. \quad (4.5)$$

2. Комплексную входную проводимость

$$\underline{Y}_{\text{вх}} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}, \quad Y_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{I_1(j\omega)}{U_1(j\omega)}. \quad (4.6)$$

КПФ можно представить в следующих формах:

а) в алгебраической форме $H(j\omega) = H_1(\omega) + jH_2(\omega)$;

б) в показательной форме $H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi_H(\omega)} = H(\omega) e^{j\varphi_H(\omega)}$;

в) в тригонометрической форме $H(j\omega) = H(\omega) \cos \varphi_H(\omega) + jH(\omega) \sin \varphi_H(\omega)$.

Амплитудно-частотная характеристика цепи (АЧХ цепи)

$$H(\omega) = |H(j\omega)| = \sqrt{H_1^2(\omega) + H_2^2(\omega)}. \quad (4.7)$$

Фазо-частотная характеристика цепи (ФЧХ цепи)

$$\varphi_H(\omega) = \arg H(j\omega) = \arctg \frac{H_2(\omega)}{H_1(\omega)}. \quad (4.8)$$

Годограф комплексной передаточной функции – это некоторая кривая, вычерчиваемая вектором $\vec{H}(j\omega)$ на комплексной плоскости P при изменении частоты от 0 до ∞ .

Пояснение: пусть имеется схема, приведенная на рис. 4.1 а.

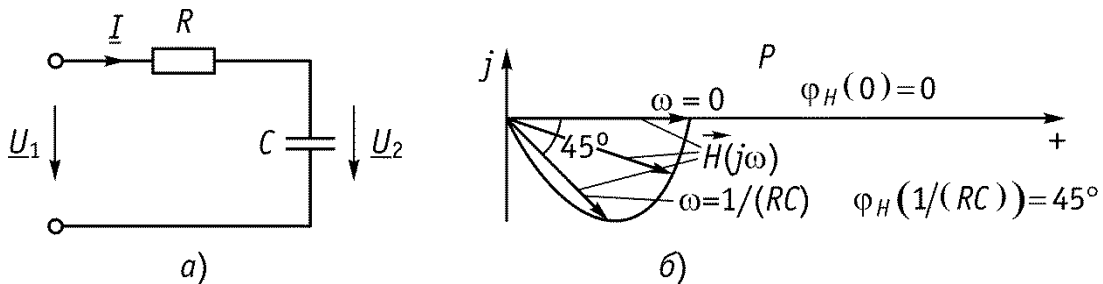


Рис. 4.1

Передаточная функция этой цепи

$$H_u(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{1}{1 + jR\omega C} = \frac{1}{\sqrt{R^2 C^2 \omega^2 + 1}} e^{-j \arctg \frac{R\omega C}{1}} = H_u(\omega) e^{j\varphi_H(\omega)}. \quad (4.9)$$

Годограф передаточной функции приведен на рисунке 4.1 б.

Резонансные цепи. Частотные характеристики резонансных цепей

Резонанс – такой режим работы пассивной цепи, содержащей R , L и C элементы, при котором реактивное сопротивление цепи (или реактивная проводимость) равны нулю.

Резонансные цепи – электрические цепи, в которых могут возникать явления резонанса напряжения или тока.

Резонанс напряжений наблюдается в электрической цепи, состоящей из последовательно соединенных участков, содержащих L и C элементы. Простой пример – последовательное соединение R , L и C элементов.

При резонансе напряжений:

- а) индуктивное сопротивление одной части цепи компенсируется емкостным сопротивлением другой части цепи;
- б) реактивное сопротивление на зажимах цепи равно нулю;
- в) реактивная мощность равна нулю, входное сопротивление цепи чисто активное;
- г) сдвиг фазы между приложенным напряжением и входным током цепи равно нулю.

Резонанс токов наблюдается в электрической цепи с параллельным соединением участков, содержащих индуктивности и емкости. Простейшая цепь такого типа – это параллельное соединение R , L и C элементов.

При резонансе токов:

- а) индуктивная проводимость одной части цепи компенсируется емкостной проводимостью другой части цепи;
- б) реактивная проводимость и реактивная мощность на зажимах цепи равна нулю;
- в) входная проводимость цепи чисто активная величина;
- г) сдвиг фазы между входным током и приложенным напряжением равен нулю.

Последовательный колебательный контур.

Частотные характеристики и основные параметры контура

Последовательный колебательный контур изображен на рис. 4.2.

Цель анализа: найти параметры и частотные характеристики контура.

Порядок анализа

1. Определяем входное комплексное сопротивление цепи

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{\text{вх}} &= \frac{U_{\text{вх}}}{I_{\text{вх}}} = Z_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{I(j\omega)} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j(X_L - X_C) = \\ &= R + jX = \sqrt{R^2 + X^2} e^{j \arctg \frac{X}{R}} = Z_{\text{вх}}(\omega) e^{j\varphi_z(\omega)},\end{aligned}\quad (4.10)$$

где R – активное сопротивление контура; X – реактивное сопротивление контура; $Z_{\text{вх}}$ – полное сопротивление контура.

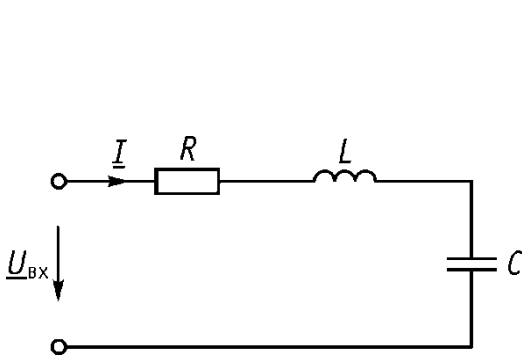


Рис. 4.2

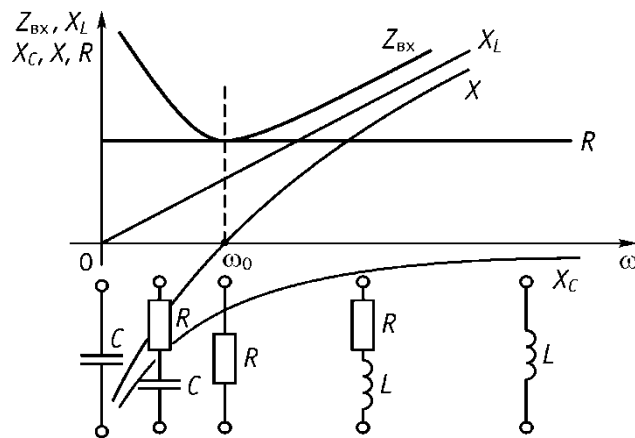


Рис. 4.3

2. Резонансная частота ω_0 определяется из условия $X = 0$

$$X = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (4.11)$$

На рис. 4.3 качественно построены графики зависимости сопротивлений $Z_{\text{вх}}$, X_L , X_C , X , R от частоты и указан характер сопротивления цепи.

3. Входное сопротивление $Z_{\text{вх}}(j\omega_0)$ контура на резонансной частоте $Z_{\text{вх}}(j\omega_0) = R$.

4. Комплексное действующее значение тока в контуре $I(j\omega)$ на произвольной частоте ω и на резонансной частоте ω_0 определяются соотношениями вида

$$I(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{Z_{BX}(j\omega)} = \frac{U(j\omega)}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{U(j\omega)}{R + jX}; \quad I(j\omega_0) = \frac{U(j\omega_0)}{R}. \quad (4.12)$$

5. Фазовые сдвиги между приложенным напряжением $U(j\omega)$ и током $I(j\omega)$ на произвольной ω и резонансной ω_0 частотах равны

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}; \quad \varphi(\omega_0) = 0. \quad (4.13)$$

График зависимости фазового сдвига между напряжением $\underline{U}$ и током $\underline{I}$ показан на рис. 4.4.

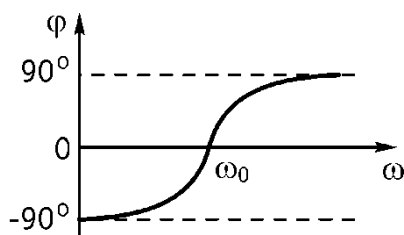


Рис. 4.4

6. Характеристическое сопротивление контура

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (4.14)$$

7. Максимальное значение реактивной энергии, запасаемой в контуре на резонансной частоте

$$W_p = W_C + W_L = \frac{Cu^2}{2} + \frac{Li^2}{2} = \frac{CU_{mC0}^2}{2} \cos^2 \omega_0 t + \frac{LI_{m0}^2}{2} \sin^2 \omega_0 t = \frac{CU_{mC0}^2}{2} = \frac{LI_{m0}^2}{2}. \quad (4.15)$$

Здесь учтено, что на резонансной частоте $U_{mC0} = I_{m0} \sqrt{L/C}$.

8. Активная энергия, поглощаемая в контуре за период T на резонансной частоте, равна

$$W_{aT} = I^2 R T = \frac{I_{m0}^2 R \cdot T}{2} = I_{m0}^2 R \cdot \pi \sqrt{LC}. \quad (4.16)$$

9. Добротность контура есть произведение 2π на отношение запасаемой в контуре реактивной энергии к рассеиваемой энергии на пассивном сопротивлении за период. Добротность контура определяется по следующей формуле

$$Q = 2\pi \frac{W_p}{W_{aT}} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} = \frac{\rho}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1/(\omega_0 C)}{R}. \quad (4.17)$$

10. Затухание контура определяется по формуле

$$d = 1/Q. \quad (4.18)$$

Виды расстроек последовательного колебательного контура

1. Абсолютная расстройка

$$\Delta\omega = \omega_0 - \omega \quad \text{или} \quad \Delta f = f_0 - f, \quad (4.19)$$

где ω (f) — текущая частота.

2. Относительная расстройка

$$\delta = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta f}{f_0}. \quad (4.20)$$

3. Обобщенная расстройка

$$\xi = \frac{X}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{\omega_0 L \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega C \omega_0 L} \right)}{R} = \frac{\rho}{R} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right). \quad (4.21)$$

Если рассматривать область малых расстроек контура, т.е. область частот вблизи резонансной частоты ω_0 , тогда, в первом приближении, обобщенную расстройку можно определить по формуле

$$\xi = Q \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \omega} = Q \frac{(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)}{\omega_0 \omega} \approx Q \frac{2\omega \cdot \Delta\omega}{\omega_0 \omega} \approx 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}. \quad (4.22)$$

Замечание. Модуль и фазу входного сопротивления можно записать через обобщенную расстройку ξ

$$Z_{\text{вх}}(\xi) = R\sqrt{1+\xi^2}; \quad \varphi(\xi) = \arctg \xi. \quad (4.23)$$

Резонансные характеристики колебательного контура

Резонансные характеристики – это зависимость тока в контуре, напряжений на индуктивности (L) и емкости (C) от частоты входного сигнала при условии, что амплитуда напряжения входного сигнала не зависит от частоты.

Зависимость действующего тока в контуре от частоты имеет вид

$$I(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} = \frac{U}{R\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad (4.24)$$

где I_0 – ток в контуре при резонансе.

График тока $I(\omega)$ представлен на рис. 4.5.

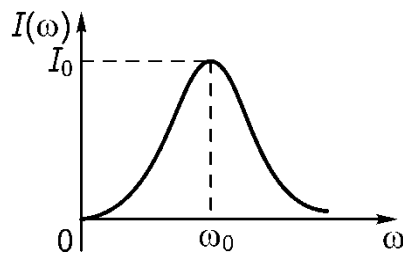


Рис. 4.5

Коэффициенты передачи по напряжению последовательного колебательного контура

1. Комплексная передаточная функция по напряжению относительно напряжения $\underline{U}_L$

$$H_{U_L}(j\omega) = \frac{U_L(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{j\omega L}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} =$$

$$= \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}} e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}\right)} = H_{U_L}(\omega) e^{j\varphi_{H_{U_L}}(\omega)}. \quad (4.25)$$

2. Комплексная передаточная функция по напряжению относительно напряжения $\underline{U}_C$

$$\begin{aligned} H_{U_C}(j\omega) &= \frac{\underline{U}_C}{\underline{U}} = \frac{1}{j\omega C \left(R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right)} = \\ &= \frac{1}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} e^{j\left(-\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}\right)} = H_{U_C}(\omega) e^{j\varphi_{H_{U_C}}(\omega)}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Графики зависимостей $H_{U_L}(\omega)$, $H_{U_C}(\omega)$ (АЧХ) и $\varphi_{H_{U_L}}(\omega)$, $\varphi_{H_{U_C}}(\omega)$ (ФЧХ) приведены на рис. 4.6 а и рис. 4.6 б.

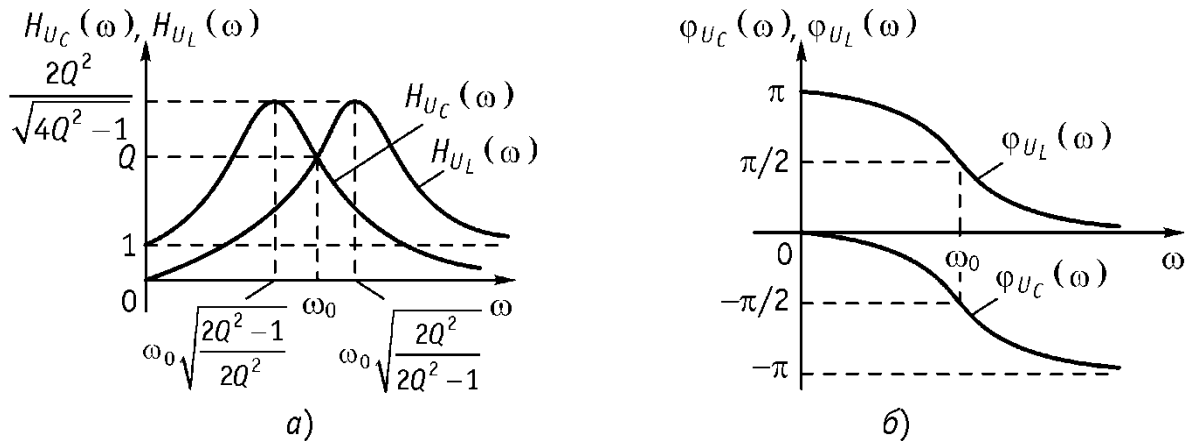


Рис. 4.6

Полоса пропускания – это диапазон частот, на границах которого коэффициент передачи уменьшается в $\sqrt{2}$ раз от его максимального значения на частоте резонанса.

1. Абсолютная полоса пропускания

$$\Delta f_a = f_B - f_H = \frac{f_0}{Q}, \quad (4.27)$$

где f_B и f_H – верхняя и нижняя частоты полосы пропускания (этим частотам соответствует $\xi = \pm 1$). Частоты f_H и f_B находятся из уравнений

$$\begin{aligned} \xi_H = Q \left(\frac{f_H}{f_0} - \frac{f_0}{f_H} \right) &= -1, \Rightarrow f_H = \frac{f_0}{2Q} (\sqrt{1 + 4Q^2} - 1); \\ \xi_B = Q \left(\frac{f_B}{f_0} - \frac{f_0}{f_B} \right) &= 1, \Rightarrow f_B = \frac{f_0}{2Q} (\sqrt{1 + 4Q^2} + 1). \end{aligned} \quad (4.28)$$

2. Относительная полоса пропускания

$$\delta f_0 = \frac{f_{\text{в}} - f_{\text{н}}}{f_0} = \frac{1}{Q} = d, \quad (4.29)$$

где d – затухание контура.

Абсолютную полосу пропускания можно выразить через резонансную частоту и добротность (или затухание) контура

$$\Delta f_{\text{а}} = f_{\text{в}} - f_{\text{н}} = \frac{1}{Q} f_0 = d \cdot f_0 = \delta f_0 \cdot f_0. \quad (4.30)$$

Полоса пропускания контура и его резонансная кривая определяют избирательность контура.

Заметим, что на резонансной частоте комплексные передаточные функции равны добротности, а напряжения на емкости и на индуктивности в Q раз больше входного напряжения

$$H_L(\omega_0) = H_C(\omega_0) = Q \quad (4.31)$$

$$U_L(\omega_0) = U_C(\omega_0) = QU_{\text{вх}}. \quad (4.32)$$

Лекция 8

Влияние сопротивления источника сигнала и сопротивления нагрузки на параметры последовательного контура. Параллельный колебательный контур, его характеристики и параметры

Влияние сопротивления источника сигнала и сопротивления нагрузки на параметры последовательного контура

Пусть имеется схема, приведенная на рис. 4.7.

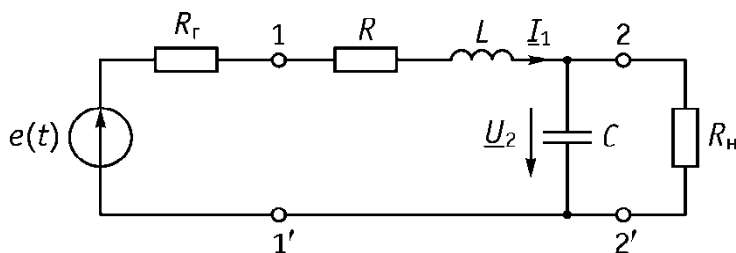


Рис. 4.7

Влияние сопротивления источника сигнала на добротность контура

1. Определяем собственную добротность контура

$$Q_k = \frac{\rho}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}. \quad (4.33)$$

2. Определяем добротность контура с учетом сопротивления R_r источника

$$Q_3 = \frac{\rho}{R + R_r} < Q_k. \quad (4.34)$$

Сопротивление источника сигнала уменьшает добротность контура. В большинстве случаев это нежелательно, поэтому источник сигнала должен иметь очень малое сопротивление, этим свойством обладает только источник напряжения, поэтому последовательный контур подключают только к источнику напряжения (а не к источнику тока, у которых большое сопротивление).

Влияние сопротивления нагрузки на добротность контура

Добротность контура с учетом сопротивления нагрузки

$$Q_n = \frac{\rho}{R + R_{вн}} < Q_k, \quad (4.35)$$

где $R_{вн}$ – вносимое сопротивление.

При подключении нагрузки полоса пропускания увеличивается, а ток в контуре уменьшается (рис. 4.8).

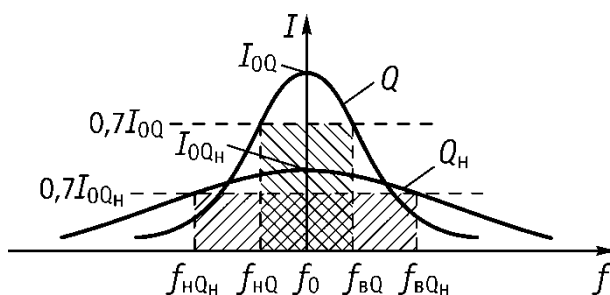


Рис. 4.8

Параллельный колебательный контур. Параметры и частотные характеристики

Электрическая схема параллельного контура с потерями приведена на рис. 4.9.

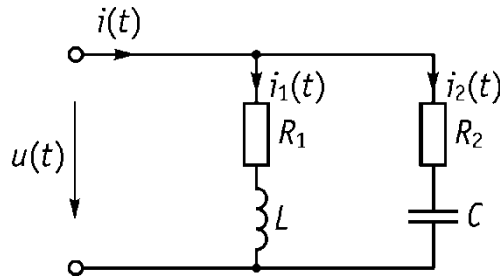


Рис. 4.9

Рассмотрим:

- 1) контур с потерями (когда сопротивлениями R_1 и R_2 нельзя пренебречь во всем диапазоне частот);
- 2) контур с малыми потерями (сопротивлениями R_1 и R_2 можно пренебречь по сравнению с характеристическим сопротивлением контура);
- 3) контур без потерь ($R_1 = 0$, $R_2 = 0$).

Параллельный колебательный контур с потерями

Цель анализа: определить параметры и частотные характеристики параллельного колебательного контура.

Анализ

1. Комплексная входная проводимость контура

$$\begin{aligned}
 \underline{Y} &= \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = \frac{1}{R_1 + j\omega L} + \frac{1}{R_2 - j\frac{1}{\omega C}} = \\
 &= \underbrace{\frac{R_1}{R_1^2 + (\omega L)^2}}_{G_1} - j \underbrace{\frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2}}_{B_1} + \underbrace{\frac{R_2}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}_{G_2} + j \underbrace{\frac{1/(\omega C)}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}_{B_2} = \\
 &= G_1 - jB_1 + G_2 + jB_2 = G_1 + G_2 - j(B_1 - B_2) = G - jB = Y \cdot e^{-j \arctg B/G},
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

где G – активная проводимость; B – реактивная проводимость.

2. Полная проводимость контура

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}. \tag{4.37}$$

3. Резонансная частота определяется из условия резонанса токов: реактивная проводимость контура равна нулю. Тогда, решая уравнение вида

$$B = \frac{\omega_p L}{R_1^2 + (\omega_p L)^2} - \frac{1/(\omega_p C)}{R_2^2 + (1/(\omega_p C))^2} = 0, \tag{4.38}$$

определяем резонансную частоту ω_p

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}, \quad (4.39)$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$; $\rho = \sqrt{L/C}$.

Резонанс токов возникает, если: а) $R_1 > \rho$, $R_2 > \rho$; б) $R_1 < \rho$, $R_2 < \rho$;

в) $R_1 = \rho$, $R_2 = \rho$ – случай «безразличного» резонанса.

4. Входная проводимость контура на резонансной частоте

$$\underline{Y}(\omega_p) = G - j0; \quad Y(\omega_p) = G_{03}, \quad (4.40)$$

где G_{03} – эквивалентная проводимость колебательного контура (полная проводимость контура на резонансной частоте)

$$G_{03} = \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega_p L)^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega_p C}\right)^2} = \frac{R_1 + R_2}{\rho^2 + R_1 R_2}. \quad (4.41)$$

5. Эквивалентное (входное) комплексное сопротивление контура

$$\underline{Z}_3 = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{(R_1 + j\omega L) \left(R_2 - j\frac{1}{\omega C} \right)}{R_1 + j\omega L + R_2 - j\frac{1}{\omega C}}. \quad (4.42)$$

6. Эквивалентное комплексное сопротивление контура на частоте резонанса

$$\underline{Z}(\omega_p) = R_{03} = \frac{1}{G_{03}} = \frac{\rho^2 + R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (4.43)$$

7. Комплексные действующие значения токов в ветвях

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_L = \underline{U} \cdot \underline{Y}_1 = U \cdot e^{j\varphi_u} \cdot \frac{1}{R_1 + j\omega L} = \frac{U \cdot e^{j(\varphi_u - \arctg(\omega L)/R_1)}}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}} = I_L(\omega) e^{j\varphi_{I_L}(\omega)}, \quad (4.44)$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_C = \underline{U} \cdot \underline{Y}_2 = \frac{U \cdot e^{j\left(\varphi_u + \arctg\frac{1/(\omega C)}{R_2}\right)}}{\sqrt{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = I_C(\omega) e^{j\varphi_{I_C}(\omega)}, \quad (4.45)$$

где $I_L(\omega)$, $I_C(\omega)$ – действующие значения токов в ветвях.

8. Комплексное действующее значение входного тока

$$\underline{I} = \underline{U} \cdot \underline{Y} = U \cdot e^{j\varphi_u} \cdot (G - jB) = U \sqrt{G^2 + B^2} \cdot e^{j(\varphi_u - \arctg B/G)}. \quad (4.46)$$

9. Комплексное действующее значение входного тока на частоте резонанса

$$I(j\omega_p) = \underline{I}(\omega_p) = U \cdot G_{03} \cdot e^{j\varphi_u}. \quad (4.47)$$

10. Действующее значение тока на резонансной частоте

$$I(\omega_p) = U \cdot G_{03} = U \frac{R_1 + R_2}{\rho^2 + R_1 R_2} = \frac{U}{R_{03}}. \quad (4.48)$$

Параллельный колебательный контур с малыми потерями

Условие малых потерь

$$R_1 \ll \rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}, \quad R_2 \ll \rho, \quad (4.49)$$

как на резонансной частоте, так и частотах, близких к резонансной (при малых расстройках ξ). Цель анализа: определить параметры и частотные характеристики параллельного колебательного контура.

1. Резонансная частота

$$\omega_p = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (4.50)$$

2. Комплексная входная проводимость контура

$$\underline{Y} = G - jB. \quad (4.51)$$

Комплексная входная проводимость контура на резонансной частоте

$$\underline{Y} = G_{03} - j0. \quad (4.52)$$

3. Комплексная входная проводимость контура на частоте резонанса, учитывая условие малых потерь ($R_1 R_2 \ll \rho^2$), равна

$$\underline{Y} = G_{03} = \frac{R_1 + R_2}{\rho^2}. \quad (4.53)$$

4. Эквивалентное (входное) комплексное сопротивление на частоте резонанса

$$\underline{Z}_3 = \frac{1}{G_{03}} = R_{03} = \frac{\rho^2}{R_1 + R_2} = \frac{\rho^2}{R} = [R = R_1 + R_2] = Q \cdot \rho = Q^2 \cdot R. \quad (4.54)$$

5. Эквивалентное (входное) комплексное сопротивление контура в режиме малой обобщенной расстройки ξ

$$\begin{aligned} \underline{Z}_3(\xi) &= \frac{L/C}{R_1 + R_2 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{\rho^2}{R\left(1 + j\frac{(\omega L - 1/(\omega C))}{R}\right)} = \\ &= \frac{\rho^2}{R(1 + j(X/R))} = \frac{\rho^2}{R(1 + j\xi)} = \frac{\rho^2}{R\sqrt{1 + \xi^2}} e^{-j \arctg \xi} = \frac{\rho^2}{R(1 + \xi^2)} - j \frac{\rho^2 \xi}{R(1 + \xi^2)} = \\ &= R_3 - jX_3 = \frac{Q \cdot \rho}{1 + \xi^2} - j \frac{Q \cdot \rho \cdot \xi}{1 + \xi^2} = \frac{R_{03}}{1 + \xi^2} - j \frac{R_{03} \cdot \xi}{1 + \xi^2}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

6. Полное эквивалентное сопротивление контура в режиме малой расстройки

$$Z(\xi) = \frac{Q \cdot \rho}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{R_{03}}{\sqrt{1 + \xi^2}}. \quad (4.56)$$

7. Полное эквивалентное сопротивление контура на резонансной частоте

$$Z(\omega_p) = Q \cdot \rho = R_{03}. \quad (4.57)$$

8. Фазо-частотная характеристика (ФЧХ) цепи (рис. 4.10)

$$\varphi(\omega) = -\arctg\left(\frac{X_3}{R_3}\right) = -\arctg \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R_1 + R_2} = -\arctg \xi. \quad (4.58)$$

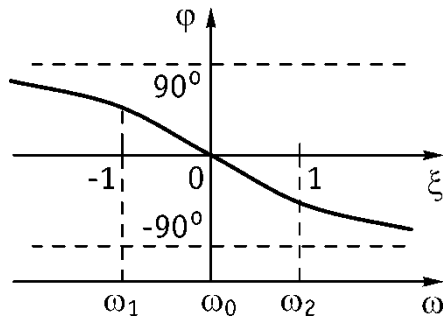


Рис. 4.10

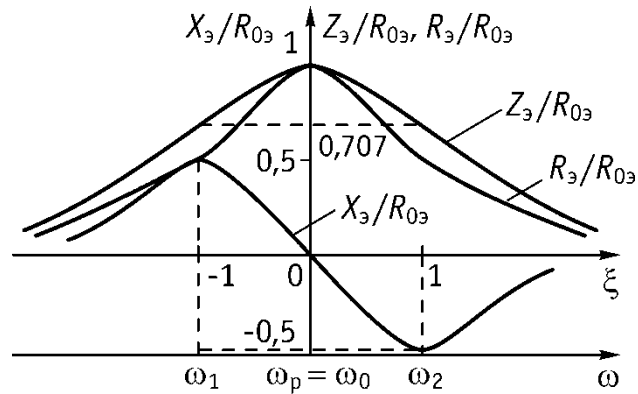


Рис. 4.11

9. Графики частотных характеристик: R_3 , X_3 , Z_3 нормированных относительно R_{03} приведены на рис. 4.11.

10. Комплексные действующие значения токов в ветвях

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 = \underline{I}_L = \underline{U} \cdot \underline{Y}_1 &= \frac{U \cdot e^{j\varphi_u}}{R_1 + j\omega L} = \frac{U \cdot e^{j(\varphi_u - \arctg(\omega L/R_1))}}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}} = I_L(\omega) e^{j\varphi_{I_L}(\omega)}, \\ \underline{I}_2 = \underline{U} \cdot \underline{Y}_2 &= \frac{U \cdot e^{j(\varphi_u + \arctg(1/(\omega C)/R_2))}}{\sqrt{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = I_C(\omega) e^{j\varphi_{I_C}(\omega)}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

11. Комплексные действующие значения токов в ветвях на частоте резонанса

$$\begin{aligned} \underline{I}_1(\omega_p) = \underline{I}_L(\omega_p) &= \frac{U \cdot e^{j(\varphi_u - \arctg(\rho/R_1))}}{\rho} = I_L \cdot e^{j\varphi_L}, \\ \underline{I}_2(\omega_p) = \underline{I}_C(\omega_p) &= \frac{U \cdot e^{j(\varphi_u - \arctg(\rho/R_2))}}{\rho} = I_C \cdot e^{j\varphi_C}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

где I_L, I_C ($I_L = I_C = U/\rho = U/(QR)$) – действующие значения токов.

12. Комплексные действующие значения входного тока для малых расстроек

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \frac{U}{Z_3} = \frac{U \cdot e^{j\varphi_u}}{R_3 - jX_3} = \frac{U \cdot e^{j\varphi_u}}{\frac{R_{03}}{1+\xi^2} - j \frac{R_{03}\xi}{1+\xi^2}} = \frac{U \cdot e^{j\varphi_u}}{Z_3 \cdot e^{j\varphi_{Z_3}}} = \\ &= \frac{U \sqrt{1+\xi^2}}{R_{03}} e^{j(\varphi_u - \arctg \xi)} = I_0 \sqrt{1+\xi^2} e^{j(\varphi_u - \arctg \xi)}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

13. Комплексные действующие значения входного тока на частоте резонанса

$$\underline{I}(\omega_0) = I_0 = \frac{U}{R_{03}} = \frac{U(R_1 + R_2)}{\rho^2} = \frac{U \cdot R}{\rho^2} = \frac{U}{Q\rho}, \quad \omega_0 \approx \omega_p. \quad (4.62)$$

14. Отношение действующего значения токов ветвей к действующему входному току

$$\frac{I_L(\omega_0)}{I(\omega_0)} = \frac{I_C(\omega_0)}{I(\omega_0)} = \frac{U/(R \cdot Q)}{U \cdot R/(Q \cdot \rho \cdot R)} = Q, \quad \omega_0 \approx \omega_p. \quad (4.63)$$

При **резонансе токов** – токи в ветвях в Q раз больше входного тока

$$I_L(\omega_0) = I_C(\omega_0) = Q \cdot I(\omega_0). \quad (4.64)$$

15. Амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики контура (модули и аргументы передаточных функций по току)

$$\begin{aligned} H_{IL}(\omega) &= \frac{1}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad H_{IC}(\omega) = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \\ \varphi_{H_{IL}}(\omega) &= -\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}, \quad \varphi_{H_{IC}}(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

16. Влияние сопротивления генератора и сопротивления нагрузки на свойства параллельного контура (рис. 4.12)

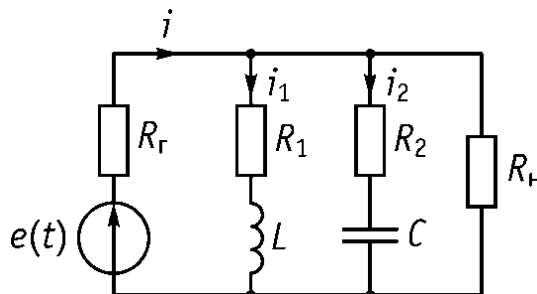


Рис. 4.12

1. Эквивалентная добротность параллельного контура

$$Q_3 = \frac{Q}{1 + R_{03} / (R_\Gamma R_H / (R_\Gamma + R_H))}. \quad (4.66)$$

2. Абсолютная полоса пропускания

$$\Delta f_a = \frac{f_0}{Q_3}. \quad (4.67)$$

3. Относительная полоса пропускания

$$\delta f_0 = \frac{\Delta f_a}{f_0} = \frac{1}{Q_3}. \quad (4.68)$$

4. Граничные частоты полосы пропускания

$$f_{1,2} = \frac{f_0}{2Q_3} (\sqrt{4Q_3^2 + 1} \mp 1). \quad (4.69)$$

Из формул видно:

1. Добротность параллельного контура уменьшается, если сопротивление R_Γ (R_H) уменьшается, при этом полоса пропускания увеличивается, и наоборот, если R_Γ (R_H) увеличивается, то добротность увеличивается, а полоса пропускания уменьшается.
2. Параллельный контур необходимо подключать к источнику тока.

Параллельный контур без потерь

Параллельный контур без потерь ($R_1 = 0$, $R_2 = 0$) приведен на рис. 4.13.

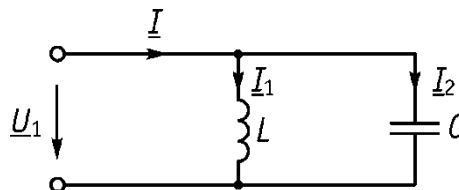


Рис. 4.13

1. Резонансная частота

$$\omega_p = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (4.70)$$

2. Комплексные токи в ветвях

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{U} \cdot \underline{Y}_1 = \underline{U} \frac{1}{j\omega L} = -j \frac{\underline{U} \cdot e^{j\Phi_u}}{\omega L}; \\ \underline{I}_2 &= \underline{U} \cdot \underline{Y}_2 = \underline{U} \cdot j\omega C = j\omega C \underline{U} \cdot e^{j\Phi_u}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

3. Комплексная проводимость контура

$$\underline{Y} = G - jB = 0 - j(B_L - B_C). \quad (4.72)$$

4. Реактивная проводимость ветвей

$$B_L = \frac{1}{\omega L}, \quad B_C = \omega C. \quad (4.73)$$

5. Реактивная проводимость контура

$$B = \frac{1}{\omega L} - \omega C. \quad (4.74)$$

6. Входной ток

$$\underline{I} = \underline{U} \cdot \underline{Y} = \underline{U} \cdot e^{j\varphi_u} (-jB). \quad (4.75)$$

7. Эквивалентное сопротивление на резонансной частоте

$$R_{03} = \infty. \quad (4.76)$$

8. Реактивное сопротивление

$$X(\omega) = \frac{1}{B(\omega)} = \frac{1}{\frac{1}{\omega L} - \omega C} = \frac{\omega L}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}. \quad (4.77)$$

9. ФЧХ (рис. 4.14)

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{0} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right). \quad (4.78)$$

10. Графики зависимостей $B_L(\omega)$, $B_C(\omega)$, $|B(\omega)|$, $X(\omega)$ приведены на рис. 4.15.

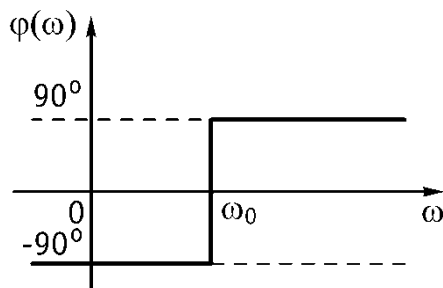


Рис. 4.14

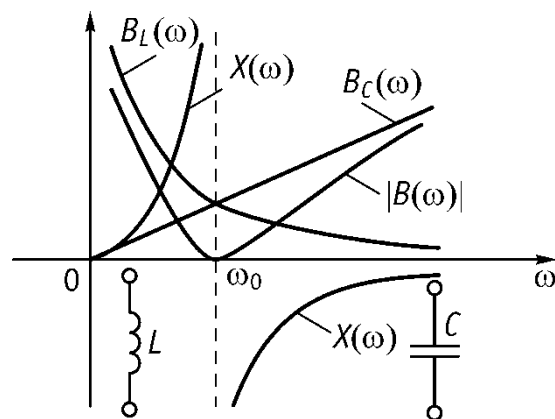


Рис. 4.15

Примеры и задачи

Пример 1. Дана цепь (рис. 4.16), определить ее комплексную передаточную функцию, построить АЧХ, ФЧХ, годограф цепи.

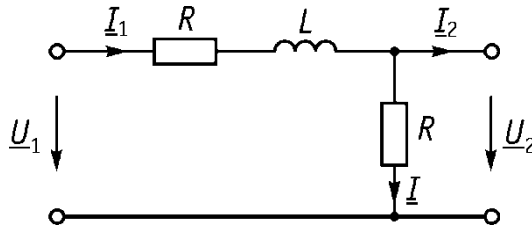


Рис. 4.16

Решение

Запишем систему уравнений по законам Кирхгофа для данной цепи

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I} + \underline{I}_2, \\ \underline{U}_1 = \underline{I}_1 (R + j\omega L) + \underline{I}R, \\ \underline{U}_2 = \underline{I}R. \end{cases}$$

Так как $\underline{I}_2 = 0$, то $\underline{I} = \underline{I}_1$, тогда

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 (2R + j\omega L); \quad \underline{U}_2 = \underline{I}_1 R;$$

$$H_u(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{2R + j\omega L};$$

$$H(\omega) = \frac{R}{\sqrt{4R^2 + (\omega L)^2}} - \text{АЧХ цепи};$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{\omega L}{2R} - \text{ФЧХ цепи}.$$

Графики АЧХ, ФЧХ и годографа цепи изображены на рис. 4.17.

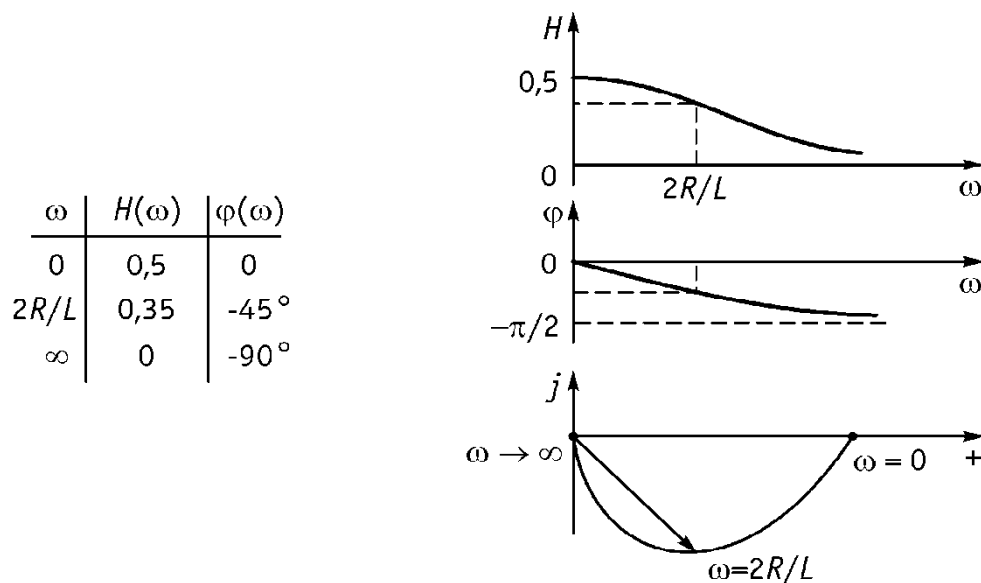


Рис. 4.17

ТЕМА 5. Переходные процессы в линейных электрических цепях

Лекция 9

Понятие переходного процесса. Законы коммутации. Независимые и зависимые начальные условия. Классификация методов анализа переходных процессов. Классический метод анализа

Переходный процесс – режим работы электрической цепи, возникающий при переходе цепи из одного установившегося состояния (которое было до времени $t = 0_-$) в другое установившееся состояние до времени $t = \infty$.

Коммутация – любое изменение параметров цепи или ее конфигурации. Коммутация осуществляется ключом. Изменение режима работы схемы может происходить при выключении, включении, переключении элементов и источников схемы. Считается, что время коммутации равно нулю (коммутация осуществляется мгновенно).

Классификация методов анализа переходных процессов

Различают:

1. **Классический метод** анализа, основан на интегро-дифференциальных или дифференциальных уравнениях, составленных для мгновенных значений токов и напряжений, используя методы законов Кирхгофа.

2. **Операторный метод**, основан на преобразовании Лапласа. Позволяет перевести интегро-дифференциальные (дифференциальные) уравнения в систему алгебраических уравнений.

3. **Временные методы** анализа:

а) **метод интеграла наложения (свертки)**, который основан на применении импульсной характеристики цепи;

б) **метод интеграла Дюамеля**, который основан на применении переходной характеристики цепи.

4. **Спектральный (частотный) метод**, основан на прямом и обратном преобразованиях Фурье для непериодических воздействий и на ряде Фурье для периодических негармонических воздействий.

Решение задачи переходных процессов любым из перечисленных методов основано на законах коммутации.

Законы коммутации

Различают:

1-й закон коммутации: ток в индуктивности в момент времени $t = 0_+$ непосредственно после коммутации равен току в индуктивности в момент времени $t = 0_-$ перед коммутацией и только с момента $t = 0_+$ начинает плавно изменяться

$$i_L(0_+) = i_L(0_-). \quad (5.1)$$

2-ой закон коммутации: напряжение на емкости в момент времени $t = 0_+$ непосредственно после коммутации равно напряжению на емкости в момент времени $t = 0_-$ перед коммутацией и только с момента времени $t = 0_+$ начинает плавно изменяться

$$u_C(0_+) = u_C(0_-). \quad (5.2)$$

Замечание 1: 1-й закон коммутации связан с непрерывностью магнитной энергии в катушке индуктивности, 2-ой закон связан с непрерывностью электрической энергии в емкости.

Замечание 2: ток в индуктивном элементе и напряжение на емкостном элементе не может изменяться скачком.

Независимые начальные условия (основаны на 1-м и 2-м законах коммутации) представляют собой значения токов в индуктивных и напряжения на емкостных элементах в момент времени $t = 0_+$ ($i_L(0_+), u_C(0_+)$). Имеются нулевые ($i_L(0_+) = 0, u_C(0_+) = 0$) и ненулевые ($i_L(0_+) \neq 0, u_C(0_+) \neq 0$) независимые начальные условия.

Зависимые начальные условия: значения напряжений на резистивных и индуктивных элементах, значения токов в резистивных и емкостных элементах в момент времени $t = 0_+$ определяются из уравнений ЗТК и ЗНК. Имеются нулевые и ненулевые зависимые начальные условия.

Классический метод анализа переходных процессов

Классический метод анализа основан на составлении и решении интегро-дифференциальных уравнений по законам Кирхгофа относительно выбранных независимых переменных, в качестве которых берется, как правило, ток в индуктивности или напряжение на емкости.

Интегро-дифференциальные уравнения обычно сводятся к одному дифференциальному уравнению m -го порядка.

Порядок уравнения m определяется количеством независимых реактивных элементов.

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения состоит из двух решений: общего $x_{\text{св}}(t)$ и частного $x_{\text{пр}}(t)$

$$x(t) = x_{\text{св}}(t) + x_{\text{пр}}(t). \quad (5.3)$$

Общее решение $x_{\text{св}}(t)$ однородного дифференциального уравнения

$$b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) = 0, \quad (5.4)$$

зависит от типа корней характеристического уравнения вида

$$b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0 = 0. \quad (5.5)$$

Возможны следующие виды корней характеристического уравнения:

1) корни вещественные и разные, при этом общее решение имеет вид

$$x_{\text{св}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_m e^{p_m t}, \quad (5.6)$$

где $p_1, \dots, p_m$ – корни характеристического уравнения, $A_1, \dots, A_m$ – постоянные интегрирования;

2) корни вещественные и кратные, при этом общее решение имеет вид

$$x_{\text{св}}(t) = (A_1 + A_2 t + A_3 t^2 + \dots + A_m t^{m-1}) e^{pt}, \quad (5.7)$$

где p – корень; m – кратность корня;

3) корни комплексно-сопряженные

$$p_{k,k-1} = -\alpha \pm j\omega_c, \quad \omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}, \quad (5.8)$$

где ω_0 – резонансная частота.

При этом пара корней (5.8) в общем решении (5.6) заменяется слагаемыми вида

$$x_{\text{св}}(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_c t + \theta), \quad (5.9)$$

где A и θ – постоянные интегрирования.

Частное решение $x_{\text{пр}}(t)$ определяется любым методом анализа цепи в установившемся (принужденном) режиме работы при $t = \infty$.

Замечание: общее решение $x_{\text{св}}(t)$ характеризует свободные процессы, происходящие в электрической цепи при отсутствии воздействия $y(t)$. Частное решение $x_{\text{пр}}(t)$ характеризует принужденные процессы при наличии воздействия $y(t)$ при $t = \infty$.

Общий алгоритм анализа переходных процессов классическим методом

1. Выбираем независимые переменные $i_L(t)$ или $u_C(t)$.
2. Определяем независимые начальные условия, используя законы коммутации.
3. На основе законов Кирхгофа составляем систему интегро-дифференциальных уравнений относительно выбранных переменных.
4. Интегро-дифференциальную систему сводим к одному дифференциальному уравнению относительно одной переменной (хотя можно решать систему).
5. Определяем характеристическое уравнение дифференциального уравнения.
6. Определяем корни характеристического уравнения.
7. Зная корни, записываем общее решение $x_{\text{св}}(t)$.
8. Определяем частное решение любым известным методом, используя схему при $t = \infty$ (установившийся принужденный режим).
9. Зная общее и частное решение, записываем решение
$$x(t) = x_{\text{св}}(t) + x_{\text{пр}}(t).$$
10. Используя начальные условия, определяем неизвестные постоянные интегрирования.
11. Записываем окончательно решение дифференциального уравнения.
12. Зная решение относительно независимых переменных, можно найти любые реакции цепи.

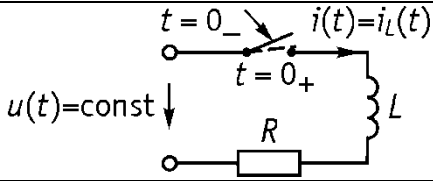
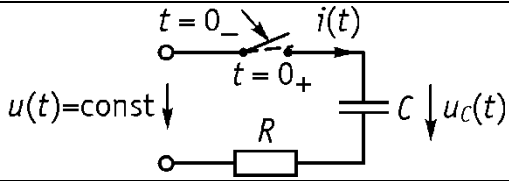
Переходные процессы в цепях 1-го порядка

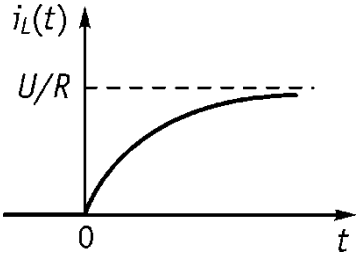
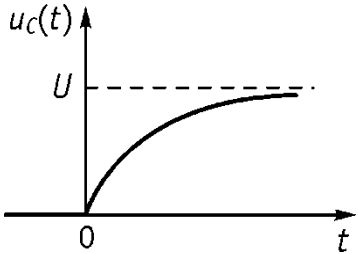
Включение RL и RC цепей на источник постоянного напряжения $u(t) = U = \text{const}$

Цель анализа: найти ток и напряжения на элементах.

Анализ представлен в табл. 5.1.

Табл. 5.1

Цепь RL	Цепь RC
	
1. Выбираем независимые переменные	
$i_L(t)$	$u_C(t)$
2. Определяем начальные условия	
$t = 0_-$ $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0 \rightarrow i_L(0_+) = 0$	$t = 0_-$ $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0 \rightarrow u_C(0_+) = 0$
3. Используя законы Кирхгофа, запишем интегро-дифференциальное уравнение при $t = 0_+$ (ключ замкнут)	
$u(t) = i(t)R + L \frac{di_L(t)}{dt}$	$u(t) = i(t)R + \frac{1}{C} \int i(t) dt =$ $= C \frac{du_C(t)}{dt} R + u_C(t)$
4. Сводим к одному дифференциальному уравнению относительно одной переменной	
$u(t) = i_L(t)R + L \frac{di_L(t)}{dt}$	$u(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} R + u_C(t)$
5. Находим характеристическое уравнение. Для этого в однородное дифференциальное уравнение $u(t) = 0$ подставляем	
$\frac{i_{Lcb}(t) = Ae^{pt}}{R \cdot Ae^{pt} + L \cdot p \cdot Ae^{pt} = 0}$ $R + Lp = 0$	$\frac{u_{Ccb}(t) = Ae^{pt}}{pCR \cdot Ae^{pt} + Ae^{pt} = 0}$ $CRp + 1 = 0$
6. Определяем корни характеристического уравнения	
$p = -R/L$	$p = -1/(CR)$
7. Зная корни, записываем общее решение дифференциального уравнения	
$i_{Lcb}(t) = A \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau_{ц}}}$ $\left \frac{1}{p} \right = \tau_{ц} - \text{постоянная времени цепи}$ $\tau_{ц} = L/R, [с]$	$u_{Ccb}(t) = A \cdot e^{-\frac{1}{CR}t} = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau_{ц}}}$ $\left \frac{1}{p} \right = \tau_{ц} - \text{постоянная времени цепи}$ $\tau_{ц} = CR, [с]$
8. Находим частное решение дифференциального уравнения	
$i_{Lnp}(t) \Big _{t=\infty} = \frac{U}{R}$	$u_{Cnp}(t) \Big _{t=\infty} = U$

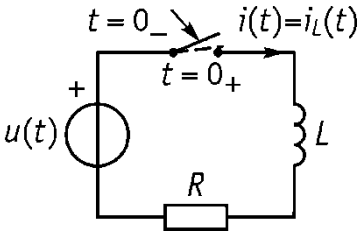
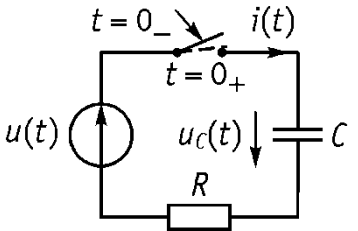
9. Зная общее и частное решение, определяем решение как сумму общего и частного решений	
$i_L(t) = i_{L\text{св}}(t) + i_{L\text{пр}}(t) =$ $= A \cdot e^{-t/\tau_{\text{ц}}} + U/R$	$u_C(t) = u_{C\text{св}}(t) + u_{C\text{пр}}(t) =$ $= A \cdot e^{-t/\tau_{\text{ц}}} + U$
10. Используя начальные условия, определяем постоянные интегрирования	
$i_L(0_+) = A \cdot 1 + \frac{U}{R} = 0, \quad A = -\frac{U}{R}$	$u_C(0_+) = A \cdot 1 + U = 0$ $A = -U$
11. Зная постоянные интегрирования (A), записываем решение	
$i_L(t) = -\frac{U}{R} \cdot e^{-t/\tau_{\text{ц}}} + \frac{U}{R} = \frac{U}{R} (1 - e^{-t/\tau_{\text{ц}}})$	$u_C(t) = -U \cdot e^{-t/\tau_{\text{ц}}} + U = U (1 - e^{-t/\tau_{\text{ц}}})$
12. Строим графики зависимости тока $i_L(t)$ и напряжения $u_C(t)$	
	
13. Зная $i_L(t)$ или $u_C(t)$ можно определить другие реакции цепи	
$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = U \cdot e^{-t/\tau_{\text{ц}}}$	$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{U}{R} \cdot e^{-t/\tau_{\text{ц}}}$

Включение RL и RC цепи на источник переменного напряжения $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$ (табл. 5.2).

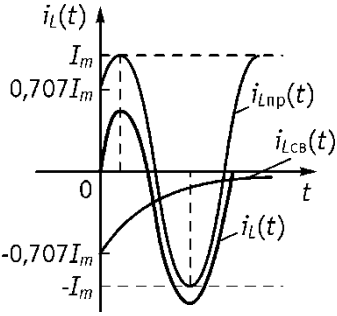
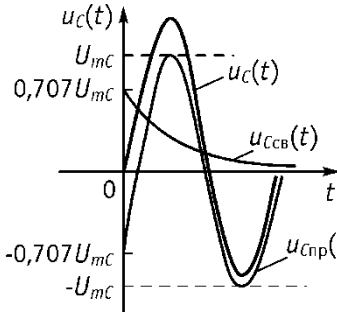
Цель анализа: найти ток и напряжение на элементах схемы.

Анализ представлен в табл. 5.2.

Табл. 5.2

Цепь RL	Цепь RC
	
Повторяем пункты 1–7 таблицы 1	
8. Определяем принужденную составляющую – частное решение	

$i_{Lnp} = \operatorname{Im} \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{j(\omega t + \varphi_u - \varphi_{RL})} =$ $= \frac{U_m \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi_{RL})}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} =$ $= I_m \sin(\omega t + \varphi_i),$ где $\varphi_{RL} = \arctg \frac{\omega L}{R}$, $\varphi_i = \varphi_u - \varphi_{RL}$, $I_m = U_m / \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$	$u_{Cnp}(t) = \operatorname{Im} \left[\frac{U_m}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{j\left(\omega t + \varphi_u + \varphi_{RC} - \frac{\pi}{2}\right)} \right] =$ $= \frac{U_m \frac{1}{\omega C} \sin\left(\omega t + \varphi_u + \varphi_{RC} - \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} =$ $= U_{mC} \sin(\omega t + \varphi_{uC}),$ где $U_{mC} = \frac{U_m \frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$ $\varphi_{RC} = \arctg \frac{\omega C}{R}, \quad \varphi_{uC} = \varphi_u + \varphi_{RC} - \frac{\pi}{2}$
9. Зная общее и частное решения, записываем решение дифференциального уравнения	
$i_L(t) = i_{Lcb}(t) + i_{Lnp}(t) =$ $= A e^{-\frac{t}{\tau_{ц}}} + \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \varphi_i)$	$u_C(t) = u_{Ccb}(t) + u_{Cnp}(t) =$ $= A e^{-\frac{t}{\tau_{ц}}} + U_{mC} \sin(\omega t + \varphi_{uC})$
10. Используя начальные условия, находим постоянные интегрирования	
$i_L(t)_{t=0+} = A + I_m \sin \varphi_i = 0$ $A = -I_m \sin \varphi_i$	$u_C(t)_{t=0+} = A + U_{mC} \sin \varphi_{uC} = 0$ $A = -U_{mC} \sin \varphi_{uC}$
11. Зная постоянные интегрирования, записываем решение	
$i_L(t) = -I_m \sin \varphi_i \cdot e^{-\frac{t}{\tau_{ц}}} +$ $+ I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$	$u_C(t) = -U_{mC} \sin \varphi_{uC} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_{ц}}} +$ $+ U_{mC} \sin(\omega t + \varphi_{uC})$
12. Строим графики $i_L(t)$ и $u_C(t)$, полагая $\varphi_i = 45^\circ$, $\varphi_{uC} = -45^\circ$ (для определенности)	

	
13. Зная $i_L(t)$ или $u_C(t)$, можно определить напряжение на индуктивности или ток в емкости по формулам	
$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$	$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$

Замечание 1. Постоянная времени $\tau_{ц}$ цепи характеризует длительность переходного процесса. Обычно считают, что переходный процесс заканчивается за время установления $t_y = (3 \div 5) \tau_{ц}$.

Замечание 2. Если известна кривая переходного процесса, то постоянную времени $\tau_{ц}$ цепи можно определить как отрезок времени по оси времени от $t=0$ (или линии максимального значения) до точки пересечения оси времени с касательной, проведенной к началу кривой переходного процесса (рис. 5.1).

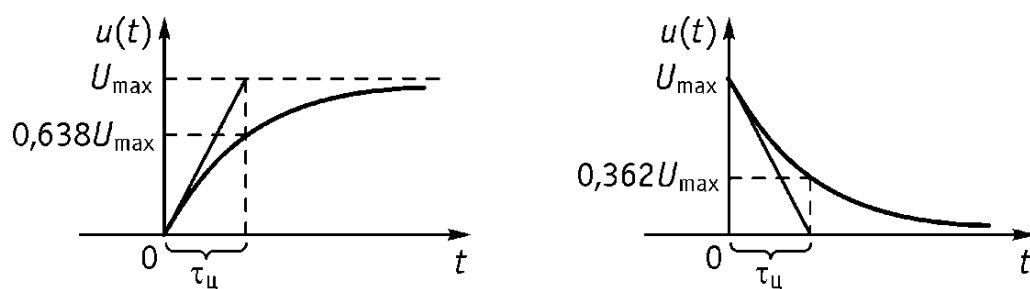


Рис. 5.1

Лекция 10

Переходные процессы в линейных электрических цепях второго порядка

Включение последовательного RLC контура на источник постоянного напряжения (рис. 5.2).

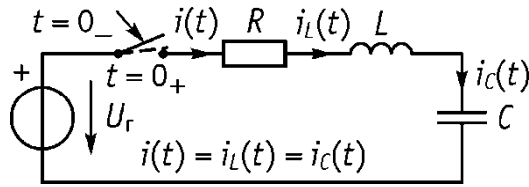


Рис. 5.2

Цель анализа: найти ток в цепи и напряжение на элементах цепи для времени $0_+ \leq t \leq \infty$.

Анализ

1. Определяем ток в цепи и напряжение на емкости в момент времени $t=0_-$ (ключ разомкнут)

$$i_L(0_-) = 0, \quad u_C(0_-) = 0. \quad (5.10)$$

2. Находим независимые начальные условия, используя законы коммутации

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) \rightarrow i_L(0_+) = 0, \quad u_C(0_-) = u_C(0_+) \rightarrow u_C(0_+) = 0 \quad (5.11)$$

(нулевые начальные условия).

3. Для $t=0_+$ (ключ замкнут) находим дифференциальное уравнение цепи:

а) используя ЗНК, записываем уравнение

$$-U_r + i(t)R + u_L(t) + u_C(t) = 0; \quad (5.12)$$

б) выбираем независимую переменную $u_C(t)$ и записываем дифференциальное неоднородное уравнение 2-го порядка

$$U_r = C \frac{du_C(t)}{dt} R + LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + u_C(t), \quad (5.13)$$

$$\text{или} \quad \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u_C(t) = \frac{U_r}{LC}. \quad (5.14)$$

4. Записываем однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u_C(t) = 0. \quad (5.15)$$

5. Находим характеристическое уравнение, подставив в однородное дифференциальное уравнение общее решение $u_{C\text{св}}(t) = Ae^{pt}$

$$p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC} = 0. \quad (5.16)$$

6. Находим корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \quad (5.17)$$

Корни могут быть: а) вещественными и разными; б) вещественными и кратными; в) комплексно-сопряженными.

7. Для этих корней общее решение имеет вид

$$\text{а) } u_{C\text{св}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}; \quad \text{б) } u_{C\text{св}}(t) = (A_1 + A_2 t) e^{pt}; \quad (5.18)$$

$$\text{в) } u_{C\text{св}}(t) = A e^{-\alpha t} \sin(\omega_{\text{св}} t + \theta), \quad (5.19)$$

где $\omega_{\text{св}} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$; A_1, A_2, A, θ – постоянные интегрирования.

8. Находим частное решение (принужденные составляющие $i_{L\text{пр}}(t)$ и $u_{C\text{пр}}(t)$ при $t = \infty$)

$$i_{L\text{пр}}(t) \Big|_{t=\infty} = 0, \quad u_{C\text{пр}}(t) \Big|_{t=\infty} = U_{\Gamma}. \quad (5.20)$$

9. Запишем решение, как сумму общего и частного решений для трех видов корней

$$\text{а) } u_C(t) = u_{C\text{св}}(t) + u_{C\text{пр}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + U_{\Gamma}; \quad (5.21)$$

$$\text{б) } u_C(t) = (A_1 + A_2 t) e^{pt} + U_{\Gamma}; \quad (5.22)$$

$$\text{в) } u_C(t) = A e^{-\alpha t} \sin(\omega_{\text{св}} t + \theta) + U_{\Gamma}. \quad (5.23)$$

Каждое решение содержит по две неизвестных постоянных интегрирования, для нахождения которых необходимо составить систему из двух уравнений. Первое уравнение системы получим, используя независимые начальные условия для напряжения на емкости. Второе уравнение получим, используя начальные условия для тока в индуктивности, но для этого надо сначала найти выражение тока в индуктивности.

10. Используя независимые начальные условия для напряжения на емкости, получим первое уравнение соответственно для корней а), б), в)

$$\text{а) } u_C(t) \Big|_{t=0_+} = u_{C\text{св}}(t) \Big|_{t=0_+} + u_{C\text{пр}}(t) \Big|_{t=0_+} = A_1 e^{p_1 t} \Big|_{t=0_+} + A_2 e^{p_2 t} \Big|_{t=0_+} + U_{\Gamma} = 0, \quad (5.24)$$

следовательно, $A_2 + A_1 + U_{\Gamma} = 0$ и $A_1 + A_2 = -U_{\Gamma}$ (первое уравнение);

$$\text{б) } u_C(t) \Big|_{t=0_+} = (A_1 + A_2 t) \Big|_{t=0_+} e^{pt} \Big|_{t=0_+} + U_{\Gamma} = 0, \quad (5.25)$$

следовательно, $A_1 + U_{\Gamma} = 0$ и $A_1 = -U_{\Gamma}$ (первое уравнение);

$$\text{в) } u_C(t) \Big|_{t=0_+} = A e^{-\alpha t} \sin(\omega_{\text{св}} t + \theta) \Big|_{t=0_+} + U_{\Gamma} = 0, \quad (5.26)$$

следовательно, $A \sin \theta + U_{\Gamma} = 0$ (первое уравнение).

11. Определяем выражение для тока в индуктивности для корней а), б), в), принимая во внимание, что

$$i_L(t) = i_C(t) = i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}. \quad (5.27)$$

$$\text{а) } i_L(t) = CA_1 p_1 e^{p_1 t} + CA_2 p_2 e^{p_2 t}; \quad (5.28)$$

$$\text{б) } i_L(t) = CA_1 p e^{pt} + CA_2 e^{pt} + CA_2 p e^{pt} t; \quad (5.29)$$

$$\text{в) } i_L(t) = -C\alpha A e^{-\alpha t} \sin(\omega_{\text{св}} t + \theta) + CA e^{-\alpha t} \cos(\omega_{\text{св}} t + \theta) \omega_{\text{св}}. \quad (5.30)$$

12. Зная выражение для тока, находим, второе уравнение, используя независимые начальные условия для тока в индуктивности

$$\text{а) } \left(A_1 p_1 e^{p_1 t} \Big|_{t=0+} + A_2 p_2 e^{p_2 t} \Big|_{t=0+} \right) C = i_L(t) \Big|_{t=0+} = 0, \quad (5.31)$$

$$A_1 p_1 + A_2 p_2 = 0 \text{ (второе уравнение).}$$

$$\text{б) } C \left(A_1 p e^{pt} + A_2 p e^{pt} t + A_2 e^{pt} \right) \Big|_{t=0+} = i_L(t) \Big|_{t=0+} = 0, \quad (5.32)$$

$$A_1 p + A_2 = 0 \text{ (второе уравнение).}$$

$$\text{в) } -C\alpha A e^{-\alpha t} \sin(\omega_{\text{св}} t + \theta) \Big|_{t=0+} + CA e^{-\alpha t} \cos(\omega_{\text{св}} t + \theta) \omega_{\text{св}} \Big|_{t=0+} = i_L(t) \Big|_{t=0+}, \quad (5.33)$$

$$-\alpha \sin \theta + \omega_{\text{св}} \cos \theta = 0 \text{ (второе уравнение).}$$

13. Решая совместно первое и второе уравнения, определяем постоянные интегрирования

$$\text{а) } \left. \begin{aligned} A_1 + A_2 &= -U_{\Gamma} \\ A_1 p_1 + A_2 p_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow A_1 = \frac{-U_{\Gamma} p_2}{p_2 - p_1}, \quad A_2 = \frac{U_{\Gamma} p_1}{p_2 - p_1}. \quad (5.34)$$

$$\text{б) } \left. \begin{aligned} A_1 &= -U_{\Gamma} \\ A_1 p + A_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow A_1 = -U_{\Gamma}, \quad A_2 = U_{\Gamma} p. \quad (5.35)$$

$$\text{в) } \left. \begin{aligned} A \sin \theta &= -U_{\Gamma} \\ -\alpha \sin \theta + \omega_{\text{св}} \cos \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow A = \frac{-U_{\Gamma}}{\sin \theta} = \frac{-U_{\Gamma} \omega_0}{\omega_{\text{св}}}, \quad \theta = \arctg \frac{\omega_{\text{св}}}{\alpha}. \quad (5.36)$$

14. Зная постоянные интегрирования, записываем решения для напряжения $u_C(t)$

$$\text{а) } u_C(t) = u_{\text{св}}(t) + u_{\text{снр}}(t) = \frac{-U_{\Gamma} p_2}{p_2 - p_1} e^{p_1 t} + \frac{U_{\Gamma} p_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t} + U_{\Gamma}; \quad (5.37)$$

$$\text{б) } u_C(t) = (-U_{\Gamma} + U_{\Gamma} t p) e^{pt} + U_{\Gamma}; \quad (5.38)$$

$$\text{в) } u_C(t) = -\frac{U_{\Gamma} \omega_0}{\omega_{\text{св}}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_{\text{св}} t + \theta) + U_{\Gamma}. \quad (5.39)$$

15. Зная напряжение на емкости и учитывая, что ток в цепи $i(t)$ равен току через индуктивность $i_L(t)$, найдем значения тока, а, зная ток, определим напряжение на индуктивности для корней а), б), в)

$$\text{а) } i_L(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = i_C(t) = i(t) = \frac{U_{\Gamma}}{L} \frac{e^{p_2 t} - e^{-p_1 t}}{p_2 - p_1}, \quad (5.40)$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = U_{\Gamma} \frac{p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}}{p_1 - p_2}. \quad (5.41)$$

$$\text{б) } i_L(t) = i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{U_{\Gamma}}{L} \cdot t \cdot e^{pt}, \quad u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = U_{\Gamma} (1 + pt) e^{pt}. \quad (5.42)$$

$$\text{в) } i_L(t) = i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{U_r}{\omega_{CB} L} e^{-\alpha t} \sin \omega_{CB} t, \quad (5.43)$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{U_r \omega_0}{\omega_{CB}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_{CB} t - \theta). \quad (5.44)$$

Здесь учтено для: а) $u_L(t) = p_1 \cdot p_2 = 1/LC$; б) $\alpha^2 = \omega_0^2$;

$$\text{г) } \alpha \sin(\omega_{CB} t + \theta) - \omega_{CB} \cos(\omega_{CB} t + \theta) = \sqrt{\alpha^2 + \omega_{CB}^2} \sin\left(\omega_{CB} t + \theta - \arctg \frac{\omega_{CB}}{\alpha}\right). \quad (5.45)$$

16. Нарисуем графики тока и напряжений:

а) для корней вещественных и разных ($\alpha > \omega_0$ или $R/(2L) > 1/\sqrt{LC}$, аperiодический режим) графики напряжений и тока изображены на рис. 5.3 а;

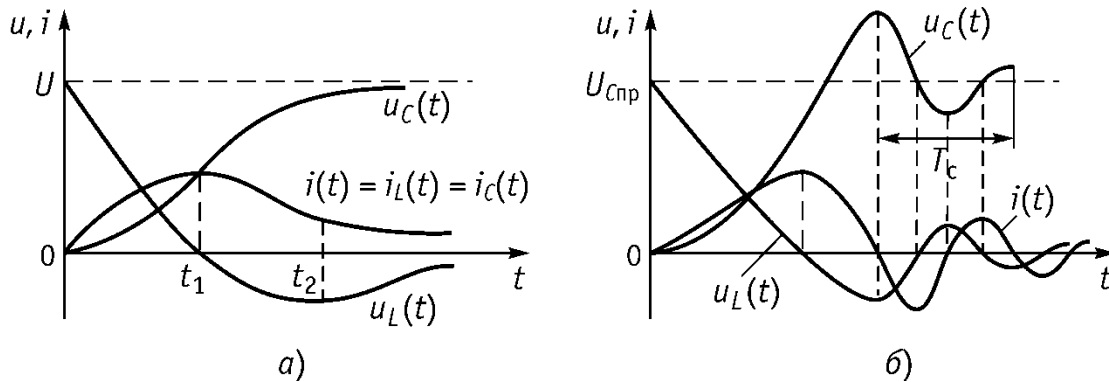


Рис. 5.3

б) для корней вещественных и равных ($\alpha = \omega_0$ или $R/(2L) = 1/\sqrt{LC}$, критический режим) графики напряжений и тока совпадают с графиком, изображенном на рис. 5.3 а;

в) для корней комплексно-сопряженных ($\alpha < \omega_0$ или $R/(2L) < 1/\sqrt{LC}$, колебательный режим) графики напряжений и тока представлены на рис. 5.3 б для $\theta = 90^\circ$ и $\omega_{CB} \approx \omega_0$,

где $\alpha = R/2L$ – коэффициент затухания контура; $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – резонансная частота контура; $\omega_{CB} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ – частота собственных затухающих колебаний контура; $\rho = \sqrt{L/C}$, $R = 2\rho$ – характеристическое и критическое сопротивления контура.

Замечание. Время t_1 определяется из условия $\frac{di_L(t)}{dt} = 0$ $t_1 = \frac{1}{p_1 - p_2} \ln \frac{p_2}{p_1}$,
 $t_2 = 2t_1$.

Случай а) – аperiодический режим работы контура, **случай б)** – критический режим работы контура, **случай в)** – колебательный режим работы.

Декремент затухания: $\Delta = u_C(t)/u_C(t + T_c) = \exp(-\alpha T_c)$.

Логарифмический декремент затухания: $\ln \Delta = \alpha T_c = \pi R / \sqrt{\rho^2 - R^2/4}$,
 где $T_c = 2\pi/\omega_{CB}$ – квазипериод собственных затуханий.

Включение последовательного R, L, C -контура на источник синусоидального напряжения (рис. 5.4).

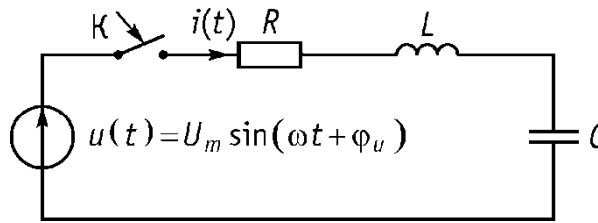


Рис. 5.4

Цель анализа: определить ток в цепи и напряжение на элементах после замыкания ключа K ($t \geq 0_+$).

Анализ

1. Повторяем пункты 1-7 при включении RLC - контура на источник постоянного напряжения.
8. Определяем частное решение (принужденную составляющую напряжения на емкости).

$$u_{\text{Cпр}}(t) = \frac{\frac{1}{\omega C} U_m \sin\left(\omega t + \varphi_u - \varphi_{RLC} - \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = U_{mC} \sin(\omega t + \varphi_{uC}), \quad (5.46)$$

$$\text{где } U_{mC} = \frac{U_m}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \quad \varphi_{uC} = \varphi_u - \varphi_{RLC} - \frac{\pi}{2}; \quad \varphi_{RLC} = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (5.47)$$

В данном случае корни характеристического уравнения также могут быть:

- а) вещественными и разными;
- б) вещественными и кратными;
- в) комплексно-сопряженными.

Рассмотрим случай комплексно-сопряженных корней.

9. Записываем решение $u_C(t)$

$$u_C(t) = u_{\text{Cсв}}(t) + u_{\text{Cпр}}(t) = A e^{-\alpha t} \sin(\omega_{\text{св}} t + \theta) + U_{mC} \sin(\omega t + \varphi_{uC}). \quad (5.48)$$

10. Используя независимые начальные условия $u_C(0_+) = 0$, найдем первое уравнение для определения постоянных интегрирования

$$u_C(t)|_{t=0_+} = A \sin \theta + U_{mC} \sin \varphi_{uC} = 0. \quad (5.49)$$

11. Для определения второго уравнения используем независимые начальные условия для тока в индуктивности $i_L(0_+) = 0$, предварительно определив ток в индуктивности

$$i_L(t) = i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = C \left(-\alpha A e^{-\alpha t} \sin(\omega_{\text{св}} t + \theta) + A \omega_{\text{св}} e^{-\alpha t} \cos(\omega_{\text{св}} t + \theta) \right) + C U_{mC} \omega \cos(\omega t + \varphi_{uC}). \quad (5.50)$$

Полагая, что контур имеет большую добротность ($\alpha \ll \omega_{\text{св}}; \omega_{\text{св}} \approx \omega_0$)

$$i_L(t) = CA\omega_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \theta) + CU_{mC} \omega \cos(\omega t + \varphi_{u_C}). \quad (5.51)$$

При $t=0_+$ имеем второе уравнение

$$CA\omega_0 \cos \theta + CU_{mC} \omega \cos \varphi_{u_C} = 0. \quad (5.52)$$

12. Решаем систему из двух уравнений (первого и второго) и определяем постоянные интегрирования

$$A = U_{mC} \sqrt{\sin^2 \varphi_{u_C} + (\omega/\omega_0)^2 \cos^2 \varphi_{u_C}}, \quad \theta = \arctg\left(\frac{\omega_0}{\omega} \operatorname{tg} \varphi_{u_C}\right). \quad (5.53)$$

13. Зная постоянные интегрирования, записываем решение дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_{\text{св}}(t) + u_{\text{снр}}(t) = \\ &= U_{mC} e^{-\alpha t} \sqrt{\sin^2 \varphi_{u_C} + (\omega/\omega_0)^2 \cos^2 \varphi_{u_C}} \sin(\omega_0 t + \theta) + U_{mC} \sin(\omega t + \varphi_{u_C}). \end{aligned} \quad (5.54)$$

14. Зная $u_C(t)$, определяем ток в цепи и напряжение на индуктивности

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{du_C(t)}{dt} = I_{mC} \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\alpha t} \sqrt{\sin^2 \varphi_{u_C} + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \cos^2 \varphi_{u_C}} \cos(\omega_0 t + \theta) + \\ &+ I_{mC} \cos(\omega t + \varphi_{u_C}), \end{aligned} \quad (5.55)$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}. \quad (5.56)$$

Анализ полученных выражений $u_C(t), i(t)$.

1. $\varphi_{u_C} = 0, \omega \gg \omega_0$. В цепи может возникнуть сверхнапряжение

$$u_{C\text{max}} = U_{mC} (1 + \omega/\omega_0). \quad (5.57)$$

2. $\varphi_{u_C} = \pi/2, \omega \ll \omega_0$. В цепи могут возникнуть сверхтоки

$$i_{\text{max}} \approx I_{mC} (1 + \omega_0/\omega). \quad (5.58)$$

3. $\omega = \omega_0$. В цепи наблюдается явление изохронизма.

Ток и напряжение плавно возрастают (рис. 5.5 а) в соответствии с уравнениями

$$\begin{aligned} u_C(t) &= U_{mC} (1 - e^{-\alpha t}) \sin(\omega t + \varphi_{u_C}), \\ i(t) &= I_{mC} (1 - e^{-\alpha t}) \cos(\omega t + \varphi_{u_C}). \end{aligned} \quad (5.59)$$

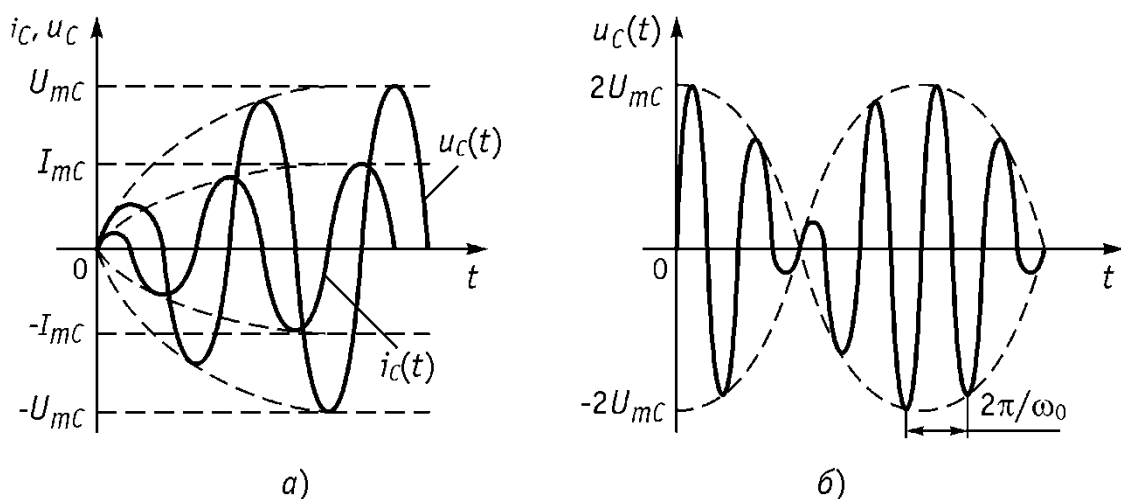


Рис. 5.5

4. Частоты ω_0 и ω близки, но не равны: $\omega_0 \approx \omega - 2\Omega$, $\omega - \omega_0 = 2\Omega$. В этом случае в цепи наступает явление биений (рис. 5.5 б) в соответствии с выражением

$$u_C(t) = 2U_{mC} \cos \Omega t \sin(\omega t + \varphi_{u_C}). \quad (5.60)$$

Примеры и задачи

Пример 1. Дана электрическая цепь (рис. 5.6). Найти законы изменения токов в ветвях и напряжения на реактивном элементе.

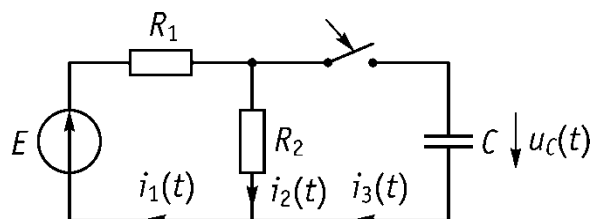


Рис. 5.6

$E = 10 \text{ В}$, $R_1 = 2 \text{ кОм}$, $R_2 = 8 \text{ кОм}$, $C = 62,5 \text{ нФ}$.

Решение

1. Обозначим токи в ветвях.

2. Определим начальные условия:

а) Независимые – для момента времени $t = 0_-$ (ключ разомкнут) (рис. 5.7)

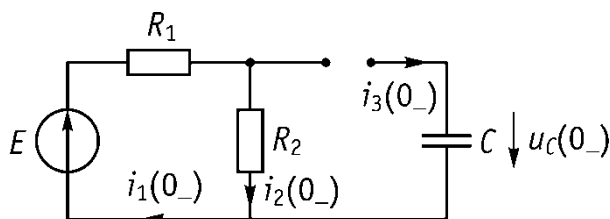


Рис. 5.7

$$i_3(0_-) = 0; \quad i_1(0_-) = i_2(0_-) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{10}{2 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^3} = 1 \text{ мА}; \quad u_C(0_-) = 0.$$

б) Зависимые – для момента времени $t = 0_+$ (рис. 5.8).

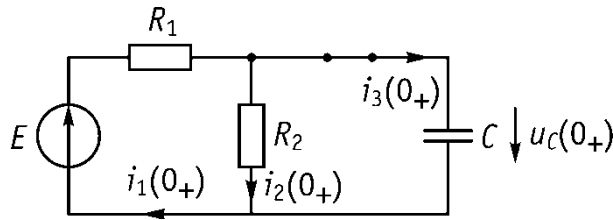


Рис. 5.8

По законам Кирхгофа

$$\begin{cases} i_1(0_+) = i_2(0_+) + i_3(0_+), \\ i_1(0_+)R_1 + u_C(0_+) = E, \\ i_2(0_+)R_2 - u_C(0_+) = 0. \end{cases}$$

По законам коммутации

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0,$$

тогда

$$i_2(0_+) = 0; \quad i_1(0_+) = i_3(0_+) = \frac{E}{R_1} = \frac{10}{2 \cdot 10^3} = 5 \text{ мА}.$$

3. Определим принужденные составляющие при $t \rightarrow \infty$

$$i_{3\text{пр}} = 0; \quad i_{1\text{пр}} = i_{2\text{пр}} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{10}{2 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^3} = 1 \text{ мА};$$

$$u_{C\text{пр}} = i_{2\text{пр}}R_2 = 1 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^3 = 8 \text{ В}.$$

4. Характеристическое уравнение можно найти, приравняв к нулю операторное сопротивление схемы, рис. 5.9.

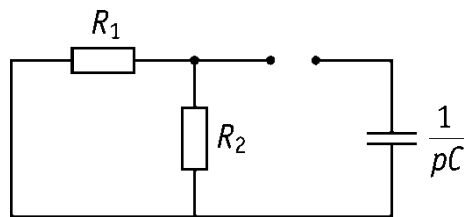


Рис. 5.9

$$Z(p) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{1}{pC} = 0.$$

$$p = -\frac{1}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C} = -\frac{1}{\frac{2 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^3} 62,5 \cdot 10^{-9}} = -10^4 \text{ [с}^{-1}\text{]}.$$

$$\tau = \left| \frac{1}{p} \right| = 0,1 \text{ мс}.$$

В цепях первого порядка закон изменения любой величины имеет вид

$$f(t) = f_{\text{пр}} + Ae^{pt},$$

где

$$A = f(0_+) - f_{\text{пр}}.$$

Представим результаты расчетов в виде табл. 5.3.

Табл. 5.3

t	0_-	0_+	∞
$i_1, \text{ мА}$	1	5	1
$i_2, \text{ мА}$	1	0	1
$i_3, \text{ мА}$	0	5	0
$u_{\text{Спр}}, \text{ В}$	0	0	8

Тогда

$$i_1(t) = 1 + 4e^{10^4 t}, \text{ мА},$$

$$i_2(t) = 1 - 1e^{10^4 t}, \text{ мА},$$

$$i_3(t) = 5e^{10^4 t}, \text{ мА},$$

$$u_C(t) = 8 - 8e^{10^4 t}, \text{ В}.$$

Графики токов и напряжения представлены на рис. 5.10.

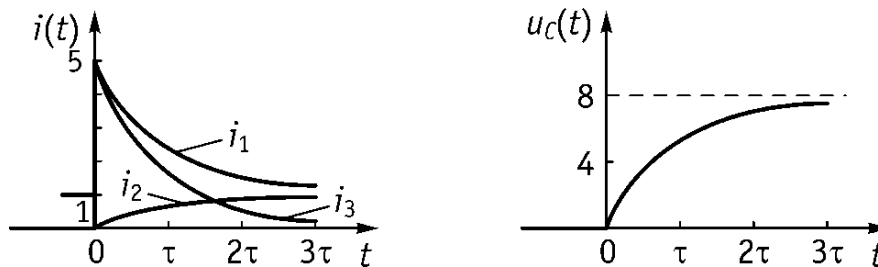


Рис. 5.10

ТЕМА 6. Операторный метод анализа переходных процессов

Лекция 11

Преобразование Лапласа. Основные теоремы и свойства

Операторный метод анализа базируется на преобразовании Лапласа, которое позволяет систему дифференциальных, интегральных и интегродифференциальных уравнений свести к системе алгебраических уравнений и найти требуемые неизвестные обычным аппаратом алгебры.

Различают:

а) *прямое преобразование Лапласа*

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt; \quad (6.1)$$

б) *обратное преобразование Лапласа*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} F(p) e^{pt} dp. \quad (6.2)$$

Преобразования Лапласа позволяют переходить от действительной переменной t к комплексной переменной p и обратно (от p к t). В преобразовании Лапласа функция $f(t)$ – оригинал, функция $F(p)$ – изображение. Соответствие оригинала изображению записываются следующим образом

$$\begin{aligned} f(t) &\div F(p), \\ f(t) &= L^{-1}[F(p)], \\ F(p) &= L[f(t)]. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Основные теоремы (свойства) преобразования Лапласа

1. *Линейность*

$$\sum_{k=1}^n a_k f_k(t) \div \sum_{k=1}^n a_k F_k(p). \quad (6.4)$$

2. *Дифференцирование оригинала*

а) *начальные условия нулевые:*

$$f'(t) \div pF(p), \dots, f^{(n)}(t) \div p^n F(p); \quad (6.5)$$

б) *начальные условия не нулевые:*

$$f'(t) \div pF(p) - f(0_+); \quad f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - \sum_{k=1}^n f^{(k-1)}(0_+) p^{n-k}. \quad (6.6)$$

3. *Интегрирование оригинала*

$$\underbrace{\int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty}}_n f(t) dt \div \frac{F(p)}{p^n}. \quad (6.7)$$

4. **Изменение масштаба действительного переменного**

$$f(at) \div \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right). \quad (6.8)$$

5. **Смещение в области действительного переменного** (теорема запаздывания)

$$f(t \mp t_0) \div e^{\mp pt_0} F(p). \quad (6.9)$$

6. **Смещение в области комплексного переменного**

$$F(p \mp \lambda) \div e^{\pm \lambda t} f(t). \quad (6.10)$$

7. **Умножение изображений соответствует свертке оригиналов**

$$F_1(p)F_2(p) \div \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau. \quad (6.11)$$

8. **Дифференцирование изображения**

$$dF^n(p)/dp^n \div (-t)^n f(t). \quad (6.12)$$

9. **Интегрирование изображения**

$$\int_0^\infty F(p)dp \div \frac{f(t)}{t}. \quad (6.13)$$

10. **Умножение оригинала на синусоиду**

$$f(t)\sin(\omega_1 t) \div \frac{1}{2j} [F(p-j\omega_1) - F(p+j\omega_1)]. \quad (6.14)$$

11. **Умножение оригинала на косинусоиду**

$$f(t)\cos(\omega_1 t) \div \frac{1}{2} [F(p-j\omega_1) + F(p+j\omega_1)]. \quad (6.15)$$

12. **Предельные соотношения**

$$\text{а) } \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p); \quad \text{б) } \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p). \quad (6.16)$$

Методы определения оригинала по изображению

Это методы решения обратного преобразования Лапласа

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C_0-j\infty}^{C_0+j\infty} F(p)e^{pt} dp. \quad (6.17)$$

1. Метод, основанный на теореме разложения вида

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p)_{p=p_k}} e^{p_k t}. \quad (6.18)$$

Эта формула, по-существу, представляет собой сумму вычетов функции $F(p)e^{pt}$, причем $F(p) = F_1(p)/F_2(p)$, а p_k – простые корни (полюсы) ха-

рактического уравнения $F_2(p)=0$. Корни (полюсы) в общем случае могут быть:

а) вещественными и разными (простые полюсы), тогда

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p)_{p=p_k}} e^{p_k t}, \quad (6.19)$$

где $F_2'(p_k)$ – первая производная функции $F_2(p)$ по p ; p_k – k -ый полюс функции $F(p)$ (k -ый корень функции $F_2(p)$).

Замечание. Если функция $F(p)$ имеет нулевой полюс ($p=0$), т.е. $F(p) = F_1(p)/[p \cdot F_2(p)]$, тогда формула разложения принимает вид

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k \cdot F_2'(p)_{p=p_k}} e^{p_k t}, \quad (6.20)$$

где n – количество ненулевых полюсов;

б) вещественными и одинаковыми (кратные полюсы), тогда

$$f(t) = \sum_{k=1}^R \frac{1}{(m_k - 1)!} \frac{d^{m_k - 1}}{dp^{m_k - 1}} \left[\frac{F_1(p)}{F_2(p)} (p - p_k)^{m_k} e^{p t} \right]_{p=p_k}, \quad (6.21)$$

где R – количество полюсов, m_k – кратность k -го полюса;

в) комплексно-сопряженными (полюсы попарно комплексно-сопряженные), тогда

$$f(t) = \sum_{k=1}^Q 2 \operatorname{Re} \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p)_{p=p_k}} e^{p_k t}, \quad (6.22)$$

где Q – количество пар комплексно-сопряженных полюсов.

2. Метод, основанный на разложении функции $F(p) = F_1(p)/F_2(p)$ на простые дроби вида

$$F(p) = \frac{r_1}{p - p_1} + \frac{r_2}{p - p_2} + \frac{r_{31}}{p - p_{31}} + \frac{r_{32}}{(p - p_{32})^2} + \dots, \quad (6.23)$$

где $r_1, r_2, r_3, \dots$ – определяются как вычеты функции $F(p)$, p_1, p_2 – простые полюсы, p_{31}, p_{32} – полюсы кратности 2 и т.д.

Оригинал $f(t)$ определяется по формуле

$$f(t) = r_1 e^{p_1 t} + r_2 e^{p_2 t} + r_{31} e^{p_{31} t} + r_{32} e^{p_{32} t}. \quad (6.24)$$

Изображение наиболее часто встречающихся функций

1. **Единичная (ступенчатая) функция** (рис. 6.1)

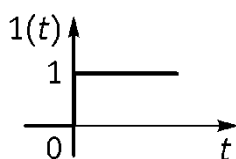


Рис. 6.1

$$1(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \geq 0, \\ 0, & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (6.25)$$

$$F(p) = \int_0^{\infty} 1(t) e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}.$$

$$1(t) \div \frac{1}{p}; \quad 1 \div \frac{1}{p}. \quad (6.26)$$

2. **Единичная импульсная функция** (функция Дирака – дельта функция)

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ \infty, & \text{при } t = 0, \\ 0, & \text{при } t > 0. \end{cases} \quad (6.27)$$

$\delta(t)$ – физически нереализуемая функция (математическая абстракция), она играет важную роль при теоретических исследованиях.

Свойства δ -функции:

а) площадь единичной импульсной функции равна единице

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1; \quad (6.28)$$

б) фильтрующее свойство δ -функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0). \quad (6.29)$$

Изображение δ -функции можно определить, найдя изображение двух ступенчатых функций вида $\delta_2(t) = 1(t)/\Delta t$ и $\delta_2(t - \Delta t) = 1(t - \Delta t)/\Delta t$, и перейдя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$

$$F(p) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta t} \frac{1}{p} - \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{p} e^{-p\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t \cdot p} (1 - e^{-p\Delta t}) = 1; \quad \delta(t) \div 1. \quad (6.30)$$

3. Экспоненциальная функция $f(t) = e^{-\alpha t} (t \geq 0)$

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-pt} dt = \frac{1}{\alpha + p}; \quad e^{-\alpha t} \div \frac{1}{\alpha + p}. \quad (6.31)$$

4. Гармонические функции

$$\sin \omega t \div \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}; \quad \cos \omega t \div \frac{p}{p^2 + \omega^2}. \quad (6.32)$$

Изображение пассивных элементов цепи

1. **Резистивное сопротивление** (рис. 6.2).

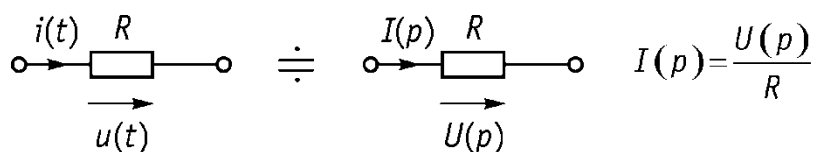


Рис. 6.2

2. **Емкостной элемент** (рис. 6.3).

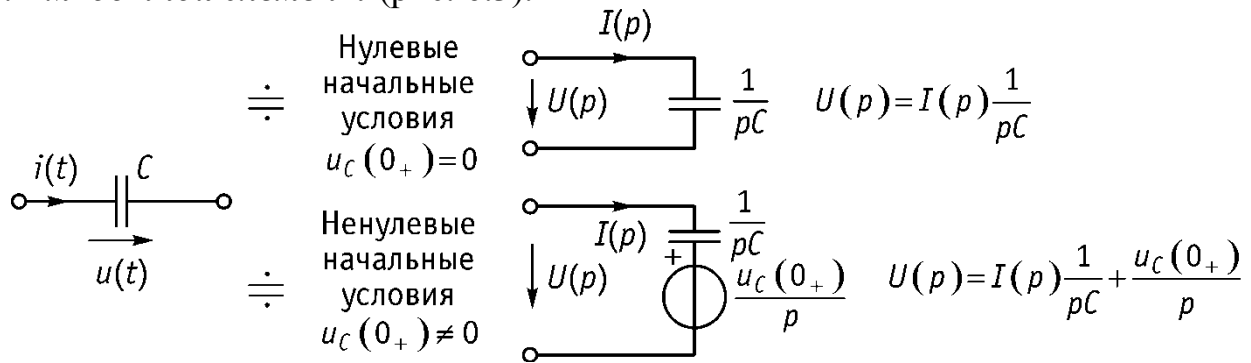


Рис. 6.3

3. **Индуктивный элемент** (рис. 6.4).

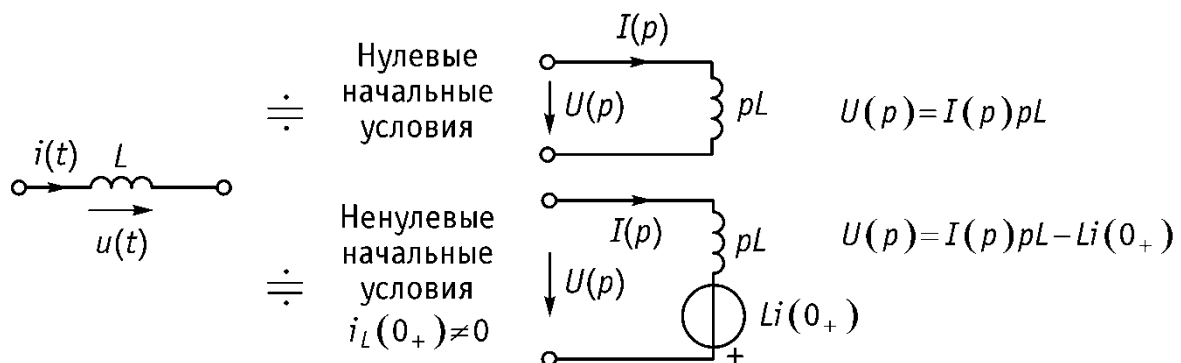


Рис. 6.4

Изображение источников

1. **Источник постоянного напряжения** (рис. 6.5 а).

2. **Источник постоянного тока** (рис. 6.5 б).

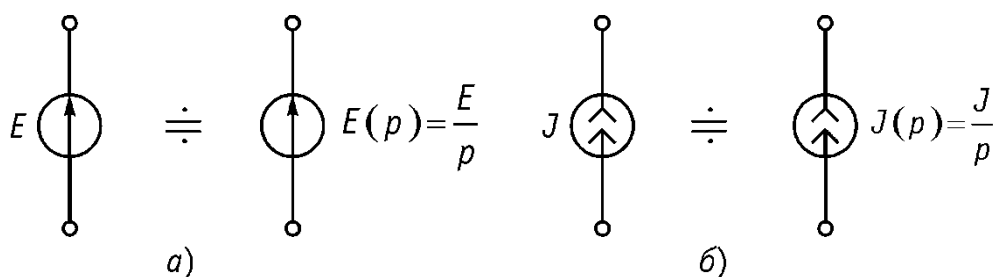


Рис. 6.5

3. **Источник переменного напряжения** (рис. 6.6).

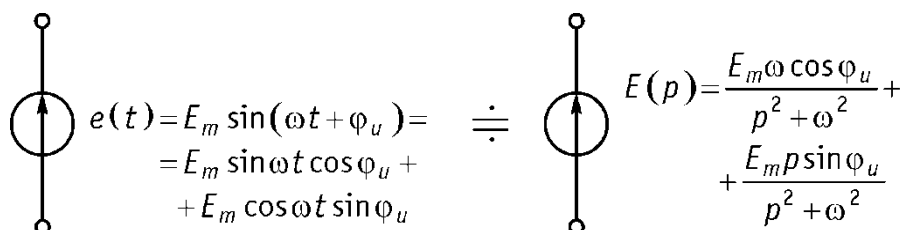


Рис. 6.6

4. Источник переменного тока (рис. 6.7).

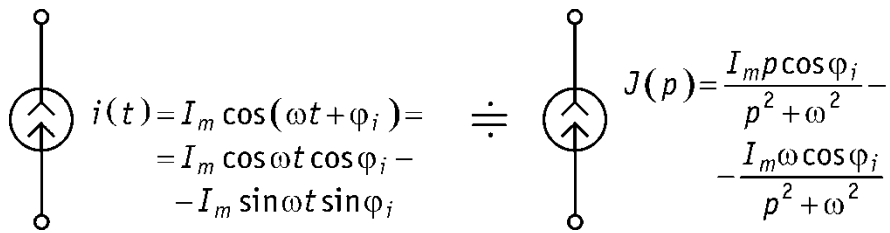


Рис. 6.7

Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме

Рассмотрим законы Ома и Кирхгофа на примере схемы, изображенной на рис. 6.8 а. Операторная схема замещения для ненулевых начальных условий приведена на рис. 6.8 б.

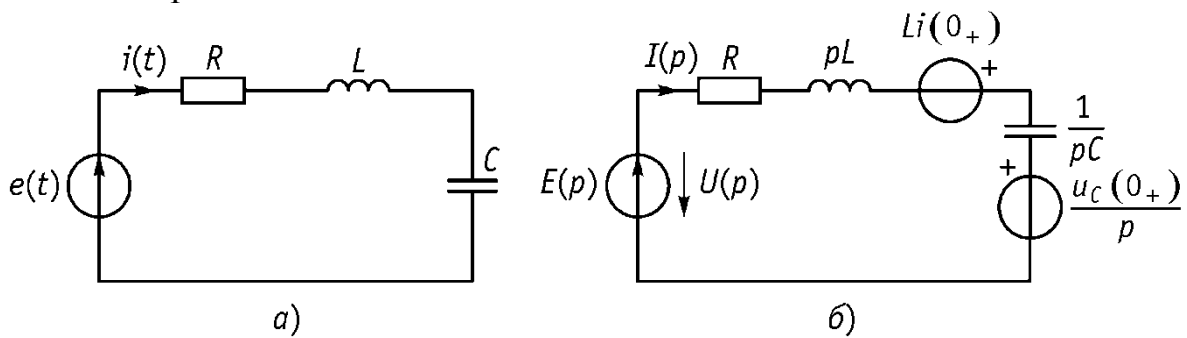


Рис. 6.8

ЗНК:

$$-U(p) + I(p)R + I(p)pL - Li(0_+) + I(p)\frac{1}{pC} + \frac{u_C(0_+)}{p} = 0. \quad (6.33)$$

Закон Ома

$$I(p) = \frac{U(p) + Li(0_+) - \frac{u_C(0_+)}{p}}{R + Lp + \frac{1}{pC}} = \frac{U_o(p)}{Z(p)}, \quad (6.34)$$

где $U_o(p)$ – операторное напряжение, $Z(p)$ – операторное сопротивление цепи.

Лекция 12

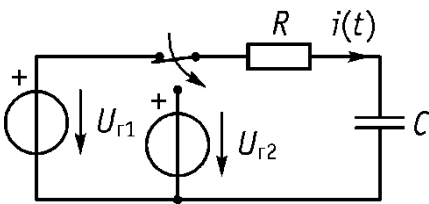
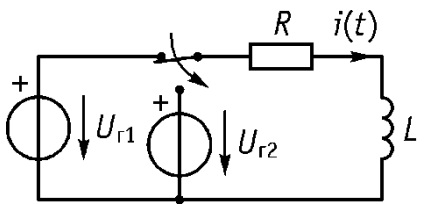
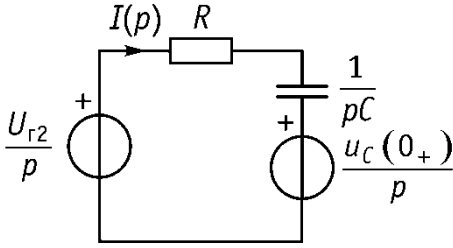
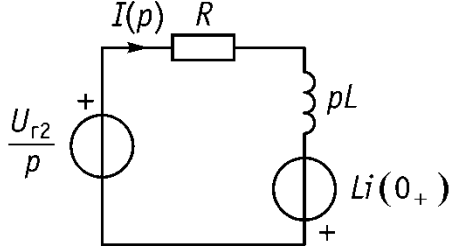
Операторный метод анализа переходных процессов в цепях первого порядка

Переключение цепи RC и RL с источника постоянного напряжения U_1 на источник постоянного напряжения U_2

Цель анализа: найти ток $i(t)$ в цепи и напряжение на элементах цепи.

Анализ переходного процесса приведен в табл. 6.1.

Табл. 6.1

Цепь RC		Цепь RL	
			
1. Определяем ток и напряжение при $t=0_-$ (ключ замкнут на U_{r1})			
$i_C(0_-)=0,$ $u_C(0_-)=U_{r1}$		$i_L(0_-)=U_{r1}/R,$ $u_L(0_-)=0$	
2. Находим независимые начальные условия, используя законы коммутации			
$u_C(0_+)=U_{r1}$		$i_L(0_+)=U_{r1}/R$	
3. Представим схему в операторной форме, учитывая начальные условия при $t=0_+$ (ключ замкнут на E_{r2})			
			
4. Определяем операторный ток $I(p)$			
$I(p)=\frac{U_{r2}/p-U_{r1}/p}{R+1/(pC)}=\frac{U_{r2}-U_{r1}}{p(R+1/(pC))}$ $=\frac{F_1(p)}{p \cdot F_2(p)}=F(p)$		$I(p)=\frac{U_{r2}/p+L \cdot U_{r1}/R}{R+pL}=\frac{U_{r2}+pL \cdot U_{r1}/R}{p(R+pL)}=\frac{F_1(p)}{p \cdot F_2(p)}=F(p)$	
5. Находим полюсы функции $F(p)$			
$p_1=0, \quad p_2=-\frac{1}{RC}$		$p_1=0, \quad p_2=-\frac{R}{L}$	

6. Зная полюсы, найдем оригинал тока по формуле $i(t) = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \frac{F_1(p_2)}{p_2 F_2'(p)} e^{p_2 t}$	
$F(p) = \frac{U_{r2} - U_{r1}}{p(R + 1/(pC))} = \frac{F_1(p)}{p \cdot F_2(p)},$ $i(t) = \frac{U_{r2} - U_{r1}}{\infty} + \frac{(U_{r2} - U_{r1})e^{-t/(RC)}}{\left(-\frac{1}{RC}\right)\left(-\frac{1}{C(-1/(RC))^2}\right)} =$ $= \frac{0 + (U_{r2} - U_{r1})e^{-t/(RC)}}{R} = \frac{(U_{r2} - U_{r1})e^{-t/(RC)}}{R}$	$F(p) = \frac{U_{r2} + \frac{pLU_{r1}}{R}}{p(R + pL)},$ $i(t) = \frac{U_{r2}}{R} + \frac{(U_{r2} - U_{r1})e^{-Rt/L}}{(-R/L)L} =$ $= \frac{U_{r2}}{R} + \frac{(U_{r2} - U_{r1})e^{-Rt/L}}{-R}$
7. Зная ток, найдем напряжение	
$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + u_C(0_+) =$ $= -\frac{1}{C} \frac{RC(U_{r2} - U_{r1})e^{-t/(RC)}}{R} \Big _0^t + U_{r1} =$ $= U_{r2} - (U_{r2} - U_{r1})e^{-t/(RC)}$	$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = (U_{r2} - U_{r1})e^{-tR/L}$ Замечание: если известно напряжение $u_L(t)$, то ток $i_L(t)$ определяется по формуле $i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt + i_L(0_+)$

Операторный метод анализа переходных процессов в разветвленных цепях

Рассмотрим схему, приведенную на рис. 6.9.

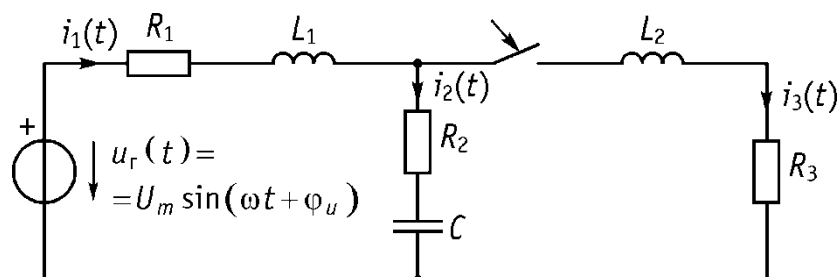


Рис. 6.9

Цель анализа: определить токи в ветвях и напряжения на элементах схемы.

Анализ

1. Определяем ток $i_1(t)$ и напряжение на емкости C в схеме до коммутации ($t=0_-$)

$$i_1(0_-) = \frac{U_m \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi_{RL_1C})}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \Big|_{t=0_-} = \frac{U_m \sin(\varphi_u - \varphi_{RL_1C})}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad (6.35)$$

$$u_C(0_-) = \frac{U_m \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi_{RLC} - \pi/2)}{\omega C \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \bigg|_{t=0_-} = \frac{U_m \sin(\varphi_u - \varphi_{RLC} - \pi/2)}{\omega C \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (6.36)$$

2. Определим независимые начальные условия, используя законы коммутации

$$i_1(0_+) = \frac{U_m \sin(\varphi_u - \varphi_{RLC})}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad u_C(0_+) = \frac{U_m \sin(\varphi_u - \varphi_{RLC} - \pi/2)}{\omega C \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (6.37)$$

3. Представим операторную схему с учетом начальных условий. Операторная схема приведена на рис. 6.10.

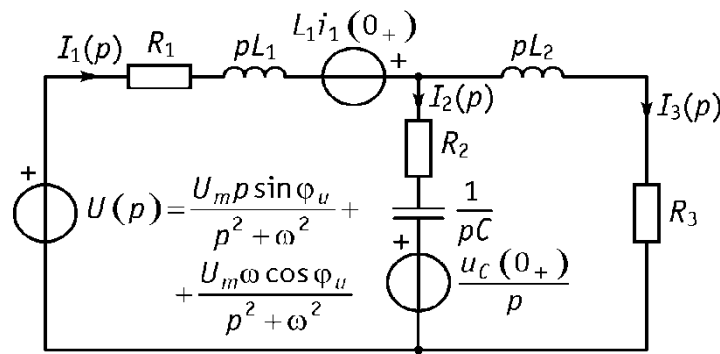


Рис. 6.10

4. Запишем уравнения ЗТК и ЗНК в операторной форме

$$\begin{cases} -I_1(p) + I_2(p) + I_3(p) = 0, \\ -U(p) + I_1(p)(R_1 + pL_1) - L_1 i_1(0_+) + I_2(p)\left(R_2 + \frac{1}{pC}\right) + \frac{u_C(0_+)}{p} = 0, \\ -\frac{u_C(0_+)}{p} - I_2(p)\left(R_2 + \frac{1}{pC}\right) + I_3(p)(R_3 + pL_2) = 0. \end{cases} \quad (6.38)$$

5. Решаем полученную систему уравнений относительно операторных токов

$$I_1(p) = \frac{\Delta_1(p)}{\Delta(p)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ U(p) + L_1 i_1(0_+) - u_C(0_+)/p & R_2 + 1/(pC) & 0 \\ u_C(0_+)/p & -(R_2 + 1/(pC)) & R_3 + pL_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ pL_1 + R_1 & R_2 + 1/(pC) & 0 \\ 0 & -(R_2 + 1/(pC)) & R_3 + pL_2 \end{vmatrix}} = F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}, \quad (6.39)$$

где Δ – главный определитель системы операторных уравнений.

Аналогичные выражения можно получить для токов $I_2(p)$ и $I_3(p)$.

6. Находим полюсы функции $F(p)$. Полюсы могут быть:

а) вещественными и разными (полюсы вещественные); б) вещественными и одинаковыми (кратные полюсы); в) комплексно-сопряженными.

Положим, что p_1 – вещественный полюс, а p_2 и p_3 – комплексно-сопряженные.

7. Определяем оригинал тока $i_1(t)$ по формуле

$$i_1(t) = \frac{F_{1I_1}(p_1)}{F'_{2I_1}(p)|_{p=p_1}} e^{p_1 t} + 2\operatorname{Re} \left[\frac{F_{1I_1}(p_2)}{F'_{2I_1}(p)|_{p=p_2}} e^{p_2 t} \right]. \quad (6.40)$$

Токи $i_2(t)$ и $i_3(t)$ определяются аналогично.

8. Зная токи, определяем напряжения $u_L(t)$ и $u_C(t)$ по формулам

$$u_{L_2}(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt}, u_{L_1}(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt}, u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_2(t) dt + U_C(0_+). \quad (6.41)$$

Операторные передаточные функции

1. По напряжению

$$H_u(p) = U_2(p)/U_1(p). \quad (6.42)$$

2. По току

$$H_i(p) = I_2(p)/I_1(p). \quad (6.43)$$

3. Операторное передаточное сопротивление

$$H_z(p) = U_2(p)/I_1(p). \quad (6.44)$$

4. Операторная передаточная проводимость

$$H_y(p) = I_2(p)/U_1(p). \quad (6.45)$$

Операторные передаточные функции можно представить в виде:

1) дробно-рациональной функции

$$H(p) = \frac{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0} = \frac{W(p)}{V(p)}, \quad (6.46)$$

2) отношения произведений нулей и полюсов функции

$$H(p) = H \cdot \prod_{i=1}^n (p - p_{0i}) / \prod_{j=1}^m (p - p_j), \quad (6.47)$$

где $H = a_n/b_m$; p_{0i} ($i=1\dots n$), p_j ($j=1\dots m$) – соответственно нули и полюсы функции $H(p)$.

Свойства операторной передаточной функции

1. Операторная передаточная функция является дробно рациональной функцией.
2. Степень полинома числителя не превышает степени полинома знаменателя $n \leq m$.
3. Нули передаточной функции пассивной цепи могут находиться как в правой, так и в левой полуплоскостях комплексной плоскости p .
4. Полюсы передаточной функции пассивной цепи находятся в левой полуплоскости комплексной плоскости p (это указывает на затухание процессов).

Связь операторной передаточной функции и комплексной передаточной функции

Комплексную передаточную функцию $H(j\omega)$ можно получить из операторной передаточной функции $H(p)$, заменив в $H(p)$ p на $j\omega$

$$H(j\omega) = H(p)|_{p=j\omega} = \frac{(a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots) + (a_1j\omega - j\omega^3a_3 + j\omega^5a_5 - \dots)}{(b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \dots) + (b_1j\omega - j\omega^3b_3 + j\omega^5b_5 - \dots)} =$$

$$= \frac{P_1(\omega) + jP_2(\omega)}{Q_1(\omega) + jQ_2(\omega)} = \sqrt{\frac{P_1^2(\omega) + P_2^2(\omega)}{Q_1^2(\omega) + Q_2^2(\omega)}} e^{j\arctg \frac{P_2(\omega)}{P_1(\omega)} - j\arctg \frac{Q_2(\omega)}{Q_1(\omega)}} = |H(j\omega)| e^{j\varphi_H(\omega)}, \quad (6.48)$$

где $|H(j\omega)|$ – АЧХ цепи; $\varphi_H(\omega)$ – ФЧХ цепи.

Квадрат модуля комплексной передаточной функции (квадрат АЧХ)

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{(a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots)^2 + (a_1\omega - \omega^3a_3 + \omega^5a_5 - \dots)^2}{(b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \dots)^2 + (b_1\omega - \omega^3b_3 + \omega^5b_5 - \dots)^2} =$$

$$= \frac{c_n\omega^{2n} + c_{n-1}\omega^{2n-2} + \dots + c_1\omega^2 + c_0}{d_m\omega^{2m} + d_{m-1}\omega^{2m-2} + \dots + d_1\omega^2 + d_0}, \quad (6.49)$$

где $c_0, \dots, c_n, d_0, \dots, d_n$ – представляют собой коэффициенты, полученные при объединении коэффициентов при одинаковых степенях ω .

Основные свойства квадрата АЧХ

1. $|H(j\omega)|^2$ – четная дробно-рациональная функция переменной ω с вещественными коэффициентами.
2. Степень полинома числителя не превышает степени полинома знаменателя, т.е. $n \leq m$.
3. $|H(j\omega)|^2$ не может принимать отрицательных или бесконечно больших значений на вещественной полуоси ($\omega > 0$).

Основные свойства аргумента $\varphi_H(\omega)$ комплексной передаточной функции

Представим аргумент в виде

$$\varphi_H(\omega) = \arctg \frac{-P_1Q_2 + Q_1P_2}{P_1Q_1 + Q_2P_2} = \arctg D(\omega). \quad (6.50)$$

1. $D(\omega)$ – нечетная дробно-рациональная функция переменной ω .
2. Коэффициенты $D(\omega)$ физически реализуемой цепи должны быть вещественными.

Примеры и задачи

Пример 1. Дана электрическая цепь рис. 6.11. Найти закон изменения тока в емкости операторным методом.

$$E = 20 \text{ В}, L = 100 \text{ мГн}, C = 200 \text{ мкФ}, R_1 = R_2 = 25 \text{ Ом}.$$

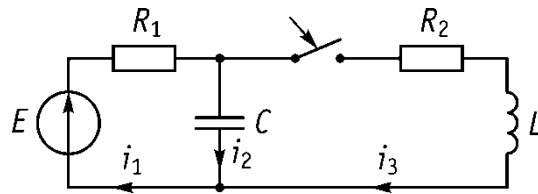


Рис. 6.11

Решение

1. Обозначим токи в ветвях.
2. Определим независимые начальные условия из схемы (рис. 6.12) до коммутации ($t = 0_-$)

$$i_3(0_-) = 0; \quad u_C(0_-) = 0.$$

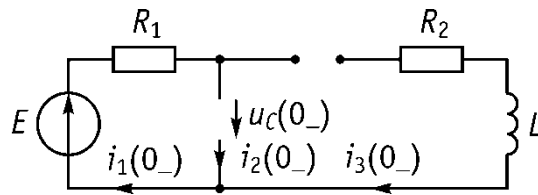


Рис. 6.12

3. Составим операторную схему замещения (рис. 6.13) при $t = 0_+$ и $t > 0$.

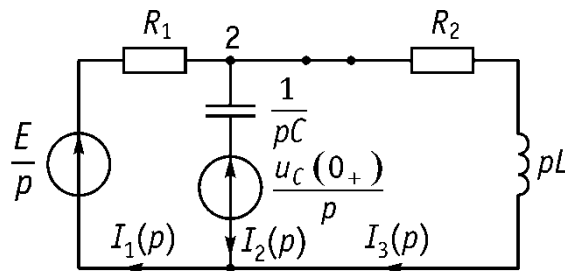


Рис. 6.13

4. Найдем изображение тока $I_2(p)$ методом узловых потенциалов.

$$\varphi_1(p) = 0,$$

$$\varphi_2(p) \left(\frac{1}{R_1} + pC + \frac{1}{R_2 + pL} \right) = \frac{E/p}{R_1} + \frac{u_C(0)/p}{1/(pC)}.$$

Подставим известные величины

$$\varphi_2(p) \left(\frac{1}{25} + 200 \cdot 10^{-6} p + \frac{1}{100 \cdot 10^{-3} p + 25} \right) = \frac{20/p}{25} + \frac{20/p}{1/(200 \cdot 10^{-6} p)},$$

$$\varphi_2(p) \left(0,04 + 2 \cdot 10^{-4} p + \frac{1}{0,1p + 25} \right) = \frac{0,8}{p} + \frac{4 \cdot 10^{-3} p}{p},$$

$$\varphi_2(p) \frac{(2 \cdot 10^{-4} p + 0,04)(0,1p + 25) + 1}{0,1p + 25} = \frac{4 \cdot 10^{-3} p + 0,8}{p},$$

$$\varphi_2(p) = \frac{4 \cdot 10^{-4} p^2 + 0,18p + 20}{p(2 \cdot 10^{-5} p^2 + 9 \cdot 10^{-3} p + 2)}.$$

$$I_2(p) = \frac{\varphi_2(p) - u_C(0)/p}{1/(pC)} = \left[\frac{4 \cdot 10^{-4} p^2 + 0,18p + 20}{p(2 \cdot 10^{-5} p^2 + 9 \cdot 10^{-3} p + 2)} - \frac{20}{p} \right] 2 \cdot 10^{-4} p =$$

$$= -\frac{4 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-5} p^2 + 9 \cdot 10^{-3} p + 2} = \frac{-200}{p^2 + 450p + 10^5}.$$

5. Перейдем от изображения тока $I_2(p)$ к оригиналу.

$$I_2(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

$$F_1(p) = -200; \quad F_2(p) = p^2 + 450p + 10^5.$$

Найдем полюсы функции $p^2 + 450p + 10^5$.

$$D = 450^2 - 4 \cdot 10^5 = -197500,$$

$p_{1,2} = -225 \pm j222$ – колебательный переходной процесс.

$$i_2(t) = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} \right].$$

$$F_2'(p) = 2p + 450; \quad F_1(p_1) = -200;$$

$$F_2'(p_1) = 2(-225 + j222) + 450 = j444.$$

$$i_2(t) = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{-200}{j444} e^{(-225 + j222)t} \right] = 2 \operatorname{Re} (0,45 e^{j90} e^{-225t} e^{j222t}) =$$

$$= 0,9 e^{-225t} \operatorname{Re} (e^{j(222t + 90^\circ)}) = 0,9 e^{-225t} \cos(222t + 90^\circ), \text{ А.}$$

6. Построим график.

$$\tau = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{225} = 4,4 \text{ мс}; \quad t_{\text{пп}} = 3\tau = 13,2 \text{ мс};$$

$$T_{\text{св}} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{222} = 28,3 \text{ мс}.$$

$T_{\text{св}} > t_{\text{пп}}$, значит колебания не будут видны на графике (рис. 6.14).

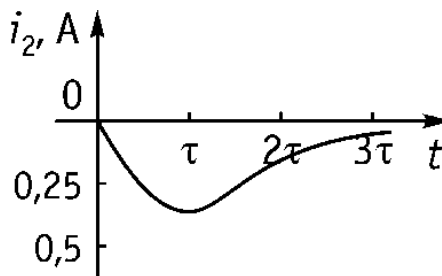


Рис. 6.14

ТЕМА 7. Временные методы анализа переходных процессов

Лекция 13

Переходная и импульсная характеристики электрических цепей. Метод интеграла Дюамеля. Метод интеграла наложения (свертки)

Временные методы анализа переходных процессов базируются на импульсной и переходной характеристиках цепи.

Импульсная характеристика $h(t)$ цепи – отношение реакции цепи на воздействие в виде единичной импульсной функции $\delta(t)$ (функции Дирака) к значению площади S_0 импульса при нулевых начальных условиях

$$h(t) = \frac{f_{\text{реакц}}(t)}{S_0} = \frac{f_{\text{реакц}}(t)}{1}. \quad (7.1)$$

Реакцией может быть напряжение или ток в любой ветви, воздействие может быть в виде источника тока или источника напряжения.

$$I(t) = 1 \cdot \delta(t); \quad U(t) = 1 \cdot \delta(t). \quad (7.2)$$

Размерность дельта-функции $\delta(t)$: $[1/c]$; размерность импульсной характеристики $h(t)$: $[1/c]$, $[A/(B \cdot c)]$, $[B/(A \cdot c)]$; размерность площади импульса S_0 : $[Bc]$, $[Ac]$.

Переходная характеристика $g(t)$ цепи – отношение реакции цепи на воздействие единичной функции $1(t)$ к значению этой функции (т.е. к 1) при нулевых начальных условиях

$$g(t) = \frac{f_{\text{реакц}}(t)}{1}. \quad (7.3)$$

В качестве реакции может быть напряжение на любом элементе или ток в любой ветви. В качестве воздействия может быть источник тока или напряжения.

Размерность функции $1(t)$: $[B]$, $[A]$.

Размерность функции $g(t)$: $[\text{безразмерная}]$ или $[A/B]$, $[B/A]$.

Связь между импульсной $h(t)$ и переходной $g(t)$ характеристиками цепи

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} = g'(t) \text{ – если нет скачка функции } g(t) \text{ (рис. 7.1 а);}$$

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} = g_1'(t) + g(0)\delta(t) \text{ – если есть скачок функции } g(t)$$

$$g(t) = g(0) \cdot 1(t) + g_1(t) \text{ (рис. 7.1 б).}$$

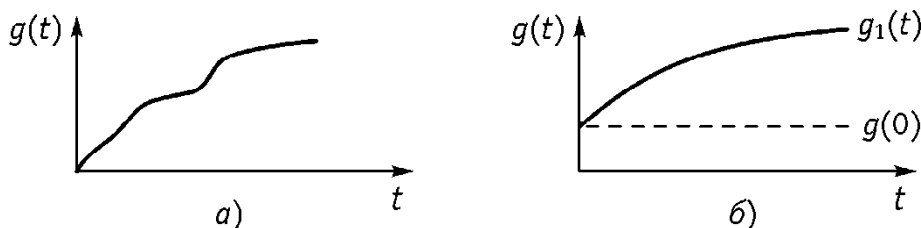


Рис. 7.1

$$g(t) = \int_0^t h(t) dt. \quad (7.4)$$

Связь между импульсной характеристикой $h(t)$ и операторной передаточной функцией цепи $H(p)$

Связь устанавливается прямым и обратным преобразованиями Лапласа

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C_0-j\infty}^{C_0+j\infty} H(p) e^{pt} dp; \quad H(p) = \int_0^\infty h(t) e^{-pt} dt. \quad (7.5)$$

Связь между переходной характеристикой $g(t)$ и операторной передаточной функцией $H(p)$

Связь установим из следующего: поскольку, $g(t) = \int_0^t h(t) dt$, а $h(t) \div H(p)$, то, учитывая свойства интегрирования оригинала, получим

$$g(t) \div H(p)/p. \quad (7.6)$$

Связь между импульсной характеристикой $h(t)$ и комплексной передаточной функцией $H(j\omega)$

Связь устанавливается с помощью прямого и обратного преобразований Фурье

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega; \quad H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (7.7)$$

Анализ переходных процессов в цепях 1-го порядка методом интеграла Дюамеля

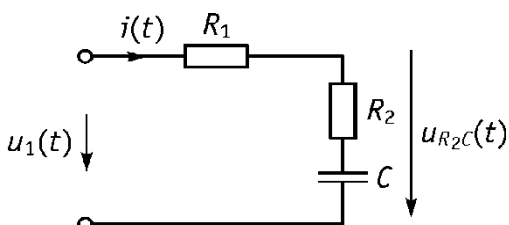
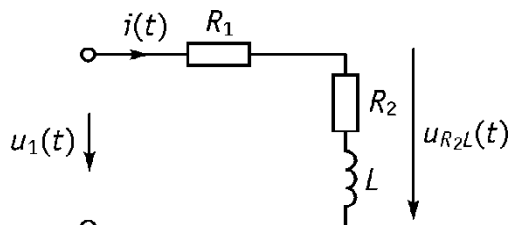
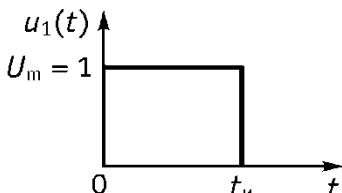
Имеется четыре формы интеграла Дюамеля. Одна из которых имеет вид

$$f_2(t) = \sum_{i=0}^k \Delta f_1(t_i) g(t-t_i) + \int_0^t f_1'(\tau) g(t-\tau) d\tau. \quad (7.8)$$

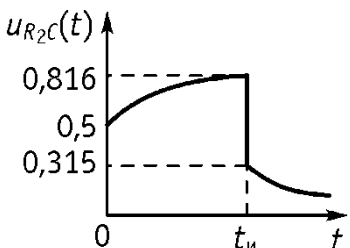
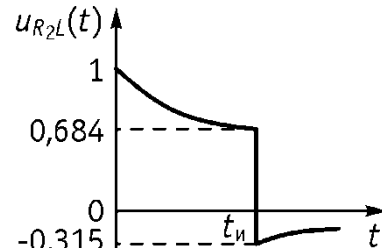
В последней формуле значение $\Delta f_1(t_i)$ имеет знак «+», если при скачке функция $f_1(t_i)$ увеличивается на $\Delta f_1(t_i)$ и знак «-», если при скачке функция $f_1(t_i)$ уменьшается на $\Delta f_1(t_i)$.

Пусть на вход RC - и RL -цепей (табл. 7.1) подается прямоугольный импульс длительностью импульса t_n и амплитудой $U_m = 1$.

Табл. 7.1

Цепь RC	Цепь RL
	
	

Требуется определить напряжение на участке цепи R_2C	Требуется определить напряжение на участке цепи R_2L
1. Находим переходную характеристику цепи (любым известным методом классическим или операторным, подавая на вход единичную функцию) или используя формулу $g(t) = g_{np}(t) + [g(0_+) - g_{np}(t)]e^{-\frac{t}{\tau_y}}$, если цепь содержит один реактивный элемент	
$g(t) = \frac{u_{R_2C}(t)}{1} = 1 + \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - 1 \right) e^{-\frac{t}{(R_1 + R_2)C}} =$ $= 1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{RC}}$	$g(t) = \frac{u_{R_2L}(t)}{1} =$ $= \frac{R_2}{R_1 + R_2} + \left[1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right] e^{-\frac{R_1 + R_2}{L}t} =$ $= \frac{R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R}{L}t}$
2. Определяем участки интегрирования 1 участок: $0 \leq t < t_n$, 2 участок: $t_n \leq t < \infty$	
3. Зная переходную характеристику, находим выходное напряжение на первом участке ($0 \leq t < t_n$), используя интеграл Дюамеля	
$u_{R_2C}(t) = f_1(0)g(t) + \int_0^t f_1'(\tau)g(t-\tau)d\tau =$ $= 1 \cdot \left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{RC}} \right) + \int_0^t 0 \cdot g(t-\tau)d\tau =$ $= 1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{RC}},$ где $R = R_1 + R_2$	$u_{R_2L}(t) = f_1(0)g(t) + \int_0^t f_1'(\tau)g(t-\tau)d\tau =$ $= 1 \cdot \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R}{L}t} \right) +$ $+ \int_0^t 0 \cdot g(t-\tau)d\tau = \frac{R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R}{L}t},$ где $R = R_1 + R_2$
4. Определяем напряжение на втором участке ($t_n \leq t < \infty$), при этом учтем результаты интегрирования на 1 участке	
$u_{R_2C} = f_1(0)g(t) + \int_0^{t_n} f_1'(\tau)g(t-\tau)d\tau +$ $+ \Delta f_1(t_n)g(t-t_n) + \int_{t_n}^t f_1'(\tau)g(t-\tau)d\tau =$	$u_{R_2L} = f_1(0)g(t) + \int_0^{t_n} f_1'(\tau)g(t-\tau)d\tau +$ $+ \Delta f_1(t_n)g(t-t_n) + \int_{t_n}^t f_1'(\tau)g(t-\tau)d\tau =$

$=1 \cdot \left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-t/\tau_{\text{ц}}} \right) +$ $+ (-1) \left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-(t-t_{\text{и}})/\tau_{\text{ц}}} \right) =$ $= \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-t/\tau_{\text{ц}}} (e^{+t_{\text{и}}/\tau_{\text{ц}}} - 1),$ где $\tau_{\text{ц}} = RC$	$=1 \cdot \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-t/\tau_{\text{ц}}} \right) + 0 +$ $+ (-1) \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-(t-t_{\text{и}})/\tau_{\text{ц}}} \right) + 0 =$ $= \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-t/\tau_{\text{ц}}} (1 - e^{t_{\text{и}}/\tau_{\text{ц}}}),$ где $\tau_{\text{ц}} = L/R$, $R = R_1 + R_2$
5. Построим графики зависимости $u_{R_2C}(t)$ и $u_{R_2L}(t)$ для $R_1 = R_2$ и $t_{\text{и}} = \tau_{\text{ц}}$	
	

Анализ переходных процессов методом интеграла наложения (свертки). Дифференцирующие и интегрирующие пассивные цепи

Интеграл наложения (свертки) имеет вид

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) h(t-\tau) d\tau, \text{ или } f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) h(\tau) d\tau. \quad (7.9)$$

Анализ переходных процессов в цепях первого порядка методом интеграла наложения (свертки)

На вход схемы, приведенной на рис. 7.2, поступает сигнал в виде прямоугольного импульса

$$u_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq t < t_{\text{и}}, \\ 0, & \text{при } t < 0, t \geq t_{\text{и}}. \end{cases} \quad (7.10)$$

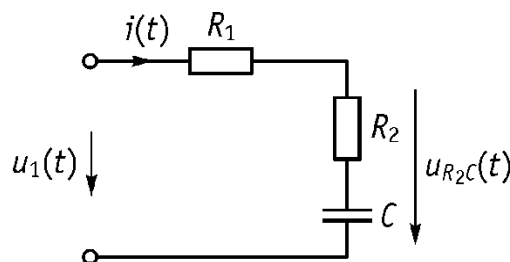


Рис. 7.2

Цель анализа: найти реакцию цепи (выходное напряжение) $u_{R_2C}(t)$ методом интеграла свертки.

Анализ

1. Находим переходную характеристику $g(t)$ цепи, используя любой известный метод или используя формулу (если цепь содержит один реактивный элемент)

$$g(t) = g_{np}(t) + [g(0_+) - g_{np}(t)] e^{-t/\tau_u} = 1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (7.11)$$

2. Определяем импульсную характеристику $h(t)$ цепи по формуле

$$h(t) = g'(t) + g(0)\delta(t) = \frac{R_1}{(R_1 + R_2)^2 C} e^{-\frac{t}{\tau_u}} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \delta(t). \quad (7.12)$$

3. Определяем участки интегрирования

а) $0 \leq t < t_n$,

б) $t_n \leq t < \infty$.

4. Находим реакцию цепи на первом участке

$$\begin{aligned} u_{R_2C}(t) &= \int_0^t u_1(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_0^t \frac{R_2}{R_1 + R_2} \delta(t-\tau) d\tau + \int_0^t \frac{R_1}{(R_1 + R_2)^2 C} e^{-\frac{t-\tau}{\tau_u}} d\tau = \\ &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_1}{(R_1 + R_2)} e^{-\frac{t}{\tau_u}} e^{\frac{\tau}{\tau_u}} \Big|_0^t = 1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau_u}}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

5. Находим реакцию цепи на втором участке, при этом учтем напряжение на первом участке

$$\begin{aligned} f_2(t) &= u_{R_2C}(t) = \\ &= \int_0^{t_n} f_1(\tau) h(t-\tau) d\tau + \int_{t_n}^t f_1(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_0^{t_n} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \delta(t-\tau) d\tau + \\ &+ \int_0^{t_n} \frac{R_1}{(R_1 + R_2)^2 C} e^{-\frac{t-\tau}{\tau_u}} d\tau + \int_{t_n}^t 0 \cdot h(t-\tau) d\tau = \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau_u}} \left(e^{\frac{t_n}{\tau_u}} - 1 \right). \end{aligned} \quad (7.14)$$

6. График напряжения $u_{R_2C}(t)$ при $R_1 = R_2$, $t_n = \tau_u$ приведен на рис. 7.3.

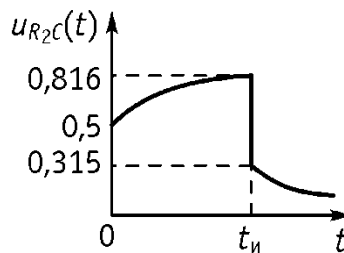


Рис. 7.3

Замечание. Характеристики $h(t)$ и $g(t)$ цепи определяются при нулевых начальных условиях.

Если начальные условия не равны 0, тогда они учитываются в схеме в виде эквивалентных источников тока и напряжения, при этом в исследуемой схеме элементы C и L представляют схемами замещения.

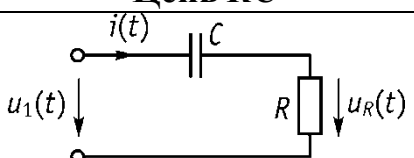
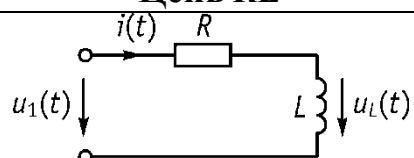
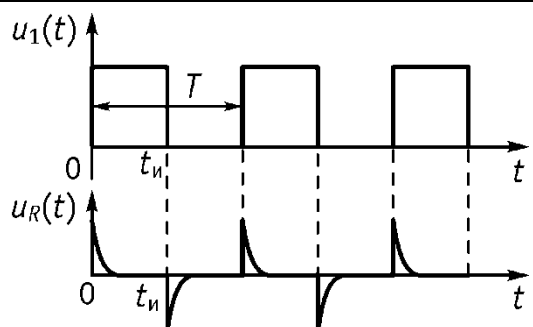
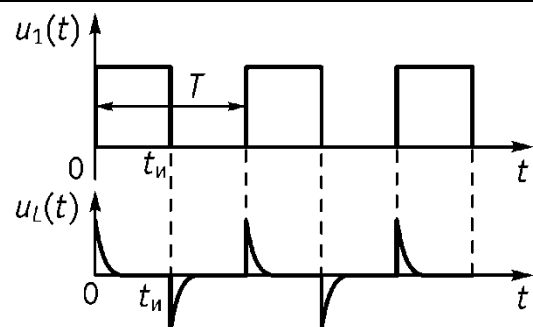
Дифференцирующие пассивные цепи

Дифференцирующие RL и RC пассивные цепи – это такие цепи, реакция которых пропорциональна производной воздействия.

Цель анализа: найти постоянные времени цепи, привести условия дифференцирования во временной и в частотной областях, определить передаточные и частотные характеристики цепей, найти реакции цепей.

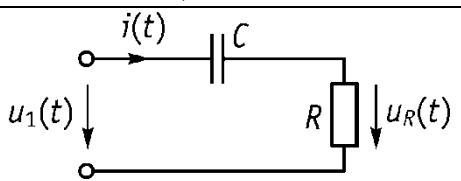
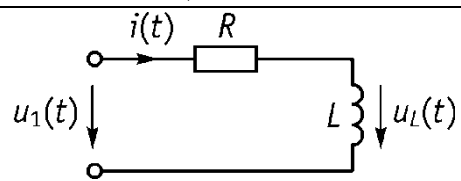
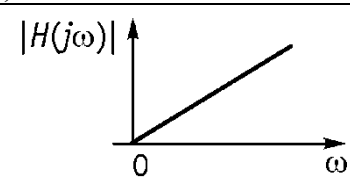
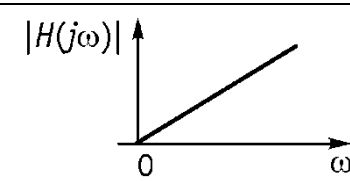
Анализ дифференцирующих RL и RC цепей во временной области приведен в табл. 7.2.

Табл. 7.2

Цепь RC	Цепь RL
	
1. Составляем уравнения, используя ЗНК	
$u_1(t) = i(t)R + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$	$u_1(t) = i(t)R + L \frac{di(t)}{dt}$
2. Записываем условия дифференцирования во временной области	
$RC \ll t_{и}, R \ll \frac{t_{и}}{C}, \tau_{ц} \ll t_{и}$	$\frac{L}{R} \ll t_{\dot{e}}, L \ll R t_{\dot{e}}, \tau_{\ddot{o}} \ll t_{\dot{e}}$
3. Учитывая условия дифференцирования, записываем уравнения ЗНК и определяем ток $i(t)$	
$u_1(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau, i(t) = C \frac{du_1(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{u_1(t)}{R}$
4. Зная ток $i(t)$, находим выходное напряжение (реакцию цепи)	
$u_R(t) = i(t)R = CR \frac{du_1(t)}{dt} = \tau_{ц} \frac{du_1(t)}{dt}$	$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = \frac{L}{R} \frac{du_1(t)}{dt} = \tau_{ц} \frac{du_1(t)}{dt}$
5. Пусть на вход цепи подается последовательность прямоугольных импульсов, причем $\tau_{ц} \ll t_{и}$. Выходные напряжения $u_R(t)$ и $u_L(t)$ имеют вид	
	

Анализ дифференцирующих RL и RC цепей в частотной области приведен в табл. 7.3.

Табл. 7.3

Цепь RC	Цепь RL
	
1. Определяем комплексную передаточную функцию цепи	
$H(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR}$	$H(j\omega) = \frac{U_L(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{j\omega L/R}{1 + j\omega L/R}$
2. Сравнивая $H(j\omega)$ с результатом идеального дифференцирования $d/dt \rightarrow j\omega$, находим условия дифференцирования в частотной области	
$\omega CR \ll 1, \tau_{\text{ц}} \ll \frac{T_{\text{min}}}{2\pi} = \frac{1}{\omega_{\text{max}}}$	$\omega \frac{L}{R} \ll 1, \tau_{\text{ц}} \ll \frac{T_{\text{min}}}{2\pi} = \frac{1}{\omega_{\text{max}}}$
3. С учетом условия дифференцирования записываем комплексную передаточную функцию	
$H(j\omega) = j\omega CR = j\omega\tau_{\text{ц}}$	$H(j\omega) = j\omega L/R = j\omega\tau_{\text{ц}}$
4. Графики модуля комплексной передаточной функции цепи $ H(j\omega) $ (АЧХ) имеют вид	
	
5. Зная $H(j\omega)$, определим выходное напряжение	
$U_R(j\omega) = H(j\omega)U_1(j\omega) = j\omega\tau_{\text{ц}}U_1(j\omega)$	$U_L(j\omega) = H(j\omega)U_1(j\omega) = j\omega\tau_{\text{ц}}U_1(j\omega)$

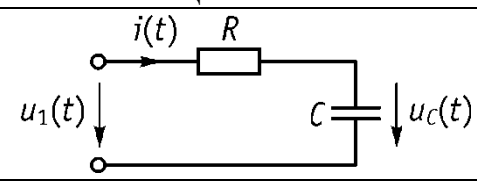
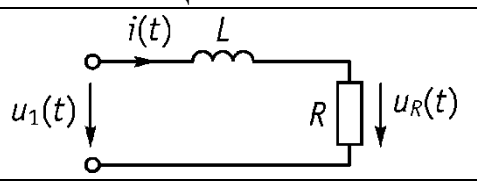
Интегрирующие пассивные RC и RL цепи

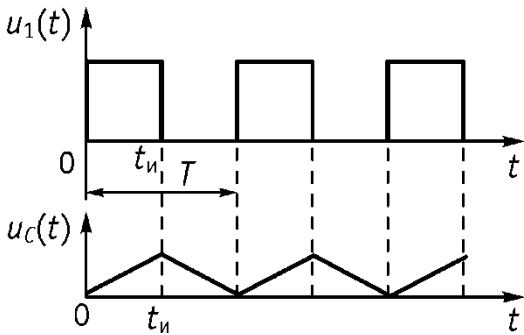
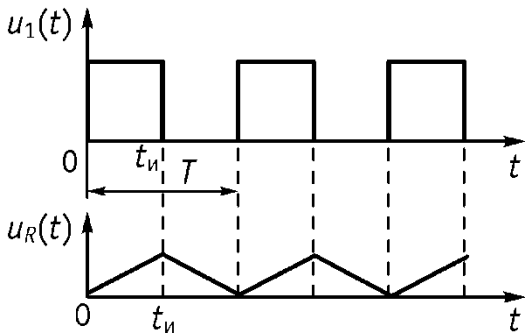
Интегрирующие пассивные RC и RL цепи – это такие цепи, реакция которых пропорциональна интегралу воздействия.

Цель анализа: найти постоянные времени цепи, привести условия интегрирования во временной и в частотной областях, найти передаточные и частотные характеристики цепей, найти реакции цепей.

Анализ интегрирующих RL и RC цепей во временной области приведен в табл. 7.4.

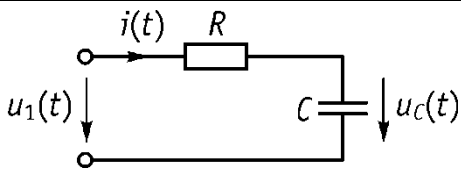
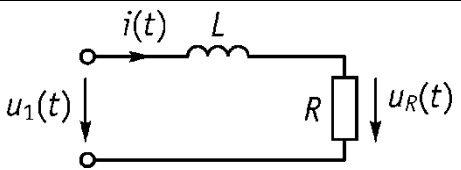
Табл. 7.4

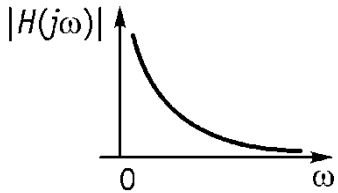
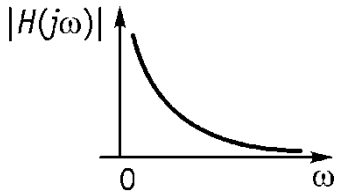
Цепь RC	Цепь RL
	
1. Составляем уравнения ЗНК	

$u_1(t) = i(t)R + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$	$u_1(t) = i(t)R + L \frac{di(t)}{dt}$
2. Записываем условия интегрирования во временной области	
$RC = \tau_{\text{ц}} \gg t_{\text{и}}, R \gg \frac{t_{\text{и}}}{C}$	$\frac{L}{R} = \tau_{\text{ц}} \gg t_{\text{и}}, L \gg R t_{\text{и}}$
3. Учитывая условия интегрирования, записываем уравнения ЗНК	
$u_1(t) = i(t)R$	$u_1(t) = L \frac{di(t)}{dt}$
4. Определяем ток в цепи	
$i(t) = \frac{u_1(t)}{R}$	$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_1(t) dt$
5. Определяем выходное напряжение. Видно, что выходное напряжение пропорционально интегралу входного напряжения	
$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t \frac{u_1(t)}{R} d\tau =$ $= \frac{1}{RC} \int_0^t u_1(t) dt = \frac{1}{\tau_{\text{ц}}} \int_0^t u_1(t) dt$	$u_R(t) = i(t)R = \frac{R}{L} \int_0^t u_1(t) dt =$ $= \frac{1}{\tau_{\text{ц}}} \int_0^t u_1(t) dt$
6. Пусть на вход цепи подается последовательность прямоугольных импульсов, причем $\tau_{\text{ц}} \gg t_{\text{и}}$. Выходные напряжения $u_C(t)$ и $u_R(t)$ имеют вид	
	

Анализ интегрирующих RL и RC цепей в частотной области приведен в табл. 7.5.

Табл. 7.5

Цепь RC	Цепь RL
	
1. Определяем комплексную передаточную функцию цепи	
$H(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$	$H(j\omega) = \frac{U_R(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega L/R}$

2. Сравнивая $H(j\omega)$ с результатом идеального интегрирования $\int \rightarrow 1/(j\omega)$, находим условия интегрирования в частотной области	
$RC\omega \gg 1, \tau_{ц} \gg \frac{T_{\max}}{2\pi} = \frac{1}{\omega_{\min}}$	$\omega \frac{L}{R} \gg 1, \tau_{ц} \gg \frac{T_{\max}}{2\pi} = \frac{1}{\omega_{\min}}$
3. С учетом условия интегрирования запишем комплексную передаточную функцию	
$H(j\omega) = \frac{1}{jRC\omega} = \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{1}{\tau_{ц}}$	$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega L/R} = \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{1}{\tau_{ц}}$
4. Графики модуля комплексной передаточной функции цепи $ H(j\omega) $ (АЧХ) имеют вид	
	
5. Зная $H(j\omega)$, определим выходное напряжение	
$U_C(j\omega) = H(j\omega)U_1(j\omega) = \frac{1}{jRC\omega}U_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau_{ц}}U_1(j\omega)$	$U_R(j\omega) = H(j\omega)U_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau_{ц}}U_1(j\omega)$

Примеры и задачи

Пример 1. Дана электрическая цепь (рис. 7.4). Определить переходные характеристики цепи $g_u(t)$, $g_I(t)$ и импульсные характеристики $h_u(t)$, $h_I(t)$.

$R = 1 \text{ кОм}$, $C = 1 \text{ мкФ}$.

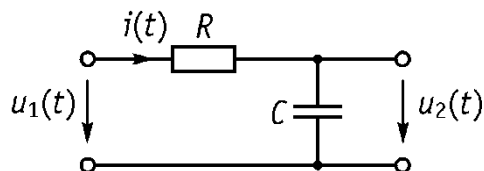


Рис. 7.4

Решение

1. Обозначим ток в схеме.

2. Переходная характеристика $g_u(t)$ численно равна напряжению на выходе, а $g_I(t)$ – току в цепи, при подаче на вход единичного воздействия.

Найдем законы изменения $u_2(t)$ и $i(t)$ при $E = 1 \text{ В}$.

3. Рассчитаем переходный процесс классическим методом (рис. 7.5).

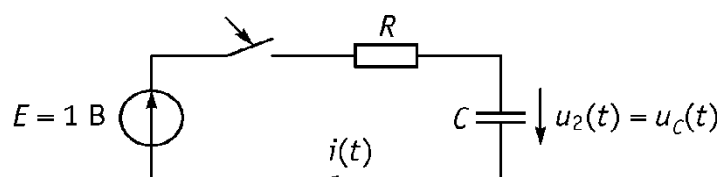


Рис. 7.5

$t = 0_-$:

$$u_C(0_-) = 0.$$

$t = 0_+$:

$$\begin{aligned} u_C(0_+) &= 0, \\ i(0_+)R + u_C(0_+) &= E, \\ i(0_+) &= \frac{E}{R} = \frac{1}{10^3} = 1 \text{ мА}. \end{aligned}$$

$t \rightarrow \infty$:

$$i_{\text{пр}} = 0, \quad u_{C\text{пр}} = E = 1 \text{ В}.$$

Корень характеристического уравнения

$$p = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{10^3 \cdot 10^{-6}} = -1000 \text{ [с}^{-1}\text{]}.$$

Получаем

$$\begin{aligned} u_2(t) &= 1 - 1e^{-1000t} \text{ В}, \\ i(t) &= 10^{-3}e^{-1000t} \text{ А}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} g_u(t) &= 1 - 1e^{-1000t}, \\ g_Y(t) &= 10^{-3}e^{-1000t} \text{ А/В}. \end{aligned}$$

Определим импульсные характеристики цепи.

$g_u(0) = 0$, тогда

$$h_u(t) = g'_u(t) = (1 - 1e^{-1000t})' = 1000e^{-1000t} \text{ (1/с)}.$$

$g_Y(0) = 10^{-3}$, тогда

$$h_Y(t) = g_Y(0) \cdot \delta(t) + g'_Y(t) = 10^{-3} \cdot \delta(t) - e^{-1000t} \text{ (А/В} \cdot \text{с)}.$$

Пример 2.

Дана электрическая цепь (рис. 7.6). Найти импульсную характеристику цепи $h_u(t)$ операторным методом.

$R = 1 \text{ кОм}$, $C = 1 \text{ мкФ}$.

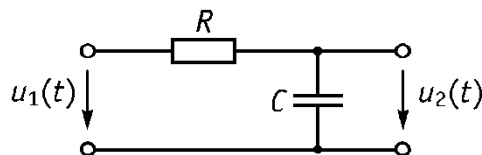


Рис. 7.6

Решение

Определим реакцию цепи, подав на вход δ -функцию, для этого составим операторную схему замещения (рис. 7.7).

$$I(p) = \frac{E(p)}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{pC}{pCR + 1}.$$

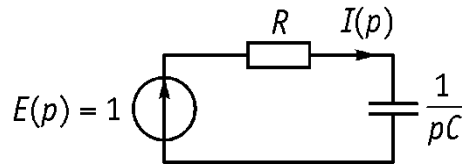


Рис. 7.7

$$u_C(p) = I(p) \frac{1}{pC} = \frac{pC}{pCR + 1} \cdot \frac{1}{pC} = \frac{1}{pCR + 1} = \frac{1/(RC)}{p + 1/(RC)} = \frac{10^3}{p + 10^3}.$$

$H_u(p) = u_C(p)$, тогда, перейдя от изображения к оригиналу, получим

$$h_u(t) = 10^3 e^{-10^3 t}, (1/c).$$

Пример 3. Задан сигнал $u_1(t)$ на входе электрической цепи (рис. 7.8). Найти закон изменения напряжения на выходе цепи методом интеграла Дюамеля.

$R = 20 \text{ Ом}$, $L = 50 \text{ мГн}$, $t_n = 20 \text{ мс}$.

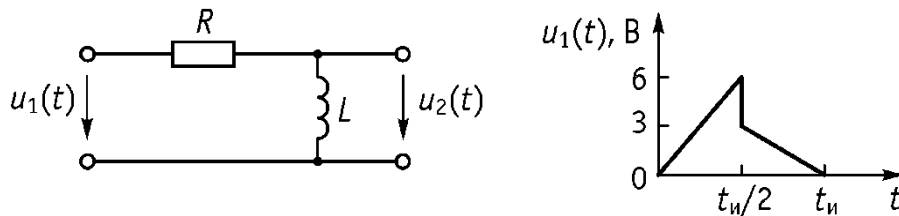


Рис. 7.8

Решение

1. Определим переходную характеристику цепи $g_u(t)$.

$$g_u(t) = g_{\text{упр}} + (g_u(0) - g_{\text{упр}}) e^{pt},$$

$$g_u(0) = 0, \quad g_{\text{упр}} = 0,$$

$$p = -\frac{R}{L} = -\frac{20}{50 \cdot 10^{-3}} = -400 \text{ с}^{-1},$$

$$g_u(t) = e^{-400t}.$$

2. Опишем входной сигнал.

Для интервала времени $t \in [0; \infty)$ его можно разбить на 3 участка

$$u_1(t) = \begin{cases} u_{11}(t), & 0 \leq t < t_n/2 \\ u_{12}(t), & t_n/2 \leq t < t_n \\ u_{13}(t), & t_n \leq t \end{cases} = \begin{cases} 600t, & 0 \leq t < 10 \text{ мс} \\ -300t + 6, & 10 \text{ мс} \leq t < 20 \text{ мс} \\ 0, & t \geq 20 \text{ мс}. \end{cases}$$

3. Запишем интеграл Дюамеля для определения $u_2(t)$.

Для каждого из 3-х участков мы запишем свою формулу.

I. $0 \leq t \leq t_n/2$.

$$u_{21}(t) = u_{11}(0) g_u(t) + \int_0^t u'_{11}(\tau) g_u(t - \tau) d\tau = \int_0^t 600 e^{-400(t-\tau)} d\tau = 1,5(1 - e^{-400t}) \text{ В}.$$

II. $t_n/2 \leq t < t_n$.

$$\begin{aligned}
u_{22}(t) &= u_{11}(0)g_u(t) + \int_0^{t_n/2} u'_{11}(\tau)g_u(t-\tau)d\tau + \\
&+ \Delta u_1\left(\frac{t_n}{2}\right)g_u\left(t-\frac{t_n}{2}\right) + \int_{t_n/2}^t u'_{12}(\tau)g_u(t-\tau)d\tau = \\
&= \int_0^{10^{-2}} 600e^{-400(t-\tau)}d\tau - 3e^{-400(t-10^{-3})} + \int_{10^{-2}}^t -300e^{-400(t-\tau)}d\tau = -0,75 - 42,56e^{-400t} \text{ В.}
\end{aligned}$$

III. $t \geq t_n$.

$$\begin{aligned}
u_{23}(t) &= u_{11}(0)g_u(t) + \int_0^{t_n/2} u'_{11}(\tau)g_u(t-\tau)d\tau + \\
&+ \Delta u_1\left(\frac{t_n}{2}\right)g_u\left(t-\frac{t_n}{2}\right) + \int_{t_n/2}^{t_n} u'_{12}(\tau)g_u(t-\tau)d\tau + \\
&+ \Delta u_1(t_n)g_u(t-t_n) + \int_{t_n}^t u'_{13}(\tau)g_u(t-\tau)d\tau = \\
&= \int_0^{10^{-2}} 600e^{-400(t-\tau)}d\tau - 3e^{-400(t-10^{-3})} + \int_{10^{-2}}^{2 \cdot 10^{-2}} -300e^{-400(t-\tau)}d\tau = -2111,3e^{-400t} \text{ В.}
\end{aligned}$$

Получим (рис. 7.9)

$$u_2(t) = \begin{cases} 1,5(1-e^{-400t}), & 0 \leq t < 10^{-2} \text{ с} \\ -0,75 - 42,56e^{-400t}, & 10^{-2} \leq t < 2 \cdot 10^{-2} \text{ с} \\ -2111,3e^{-400t}, & t \geq 2 \cdot 10^{-2} \text{ с.} \end{cases}$$

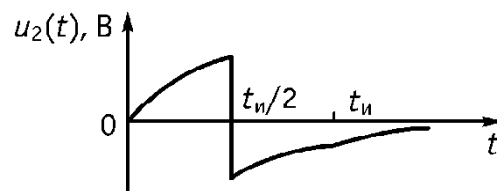


Рис. 7.9

Пример 4. Задан сигнал $u_1(t)$ на входе электрической цепи (рис. 7.10). Найти закон изменения напряжения на выходе цепи методом интеграла свертки.
 $R = 20 \text{ Ом}, L = 50 \text{ мГн}, t_n = 20 \text{ мс}.$

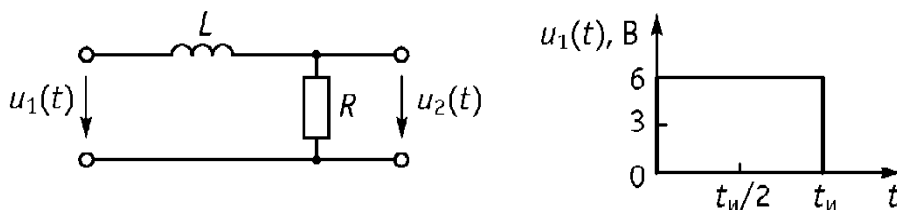


Рис. 7.10

Решение

1. Найдем импульсную характеристику цепи.

Переходная характеристика цепи по напряжению

$$g_u(t) = g_{\text{упр}} + (g_u(0) - g_{\text{упр}})e^{pt},$$

$$g_u(0) = 0, \quad g_{\text{упр}} = 1,$$

$$p = -\frac{R}{L} = -\frac{20}{50 \cdot 10^{-3}} = -400 \text{ с}^{-1},$$

$$g_u(t) = 1 - 1e^{-400t}.$$

$g_u(0) = 0$, тогда

$$h_u(t) = g'_u(t) = 400e^{-400t} \text{ с}^{-1}.$$

2. Опишем входной сигнал.

$$u_1(t) = \begin{cases} u_{11}(t), & 0 \leq t < t_{\text{и}} \\ u_{12}(t), & t \geq t_{\text{и}} \end{cases} = \begin{cases} 6, & 0 \leq t < 20 \text{ мс} \\ 0, & t \geq 20 \text{ мс}. \end{cases}$$

3. Запишем интеграл свертки для определения $u_2(t)$.

Для первого участка ($0 \leq t < t_{\text{и}}$):

$$u_{21}(t) = \int_0^t u_{11}(\tau) h_u(t-\tau) d\tau = \int_0^t 6 \cdot 400 e^{-400(t-\tau)} d\tau = 6(1 - e^{-400t}) \text{ В}.$$

Для второго участка ($t \geq t_{\text{и}}$):

$$\begin{aligned} u_{22}(t) &= \int_0^{t_{\text{и}}} u_{11}(\tau) h_u(t-\tau) d\tau + \int_{t_{\text{и}}}^t u_{12}(\tau) h_u(t-\tau) d\tau = \\ &= \int_0^{20 \cdot 10^{-3}} 6 \cdot 400 e^{-400(t-\tau)} d\tau = 17879,7 e^{-400t} \text{ В}. \end{aligned}$$

В результате получим (рис. 7.11)

$$u_2(t) = \begin{cases} 6(1 - e^{-400t}), & 0 \leq t < 20 \text{ мс} \\ 17879,7 e^{-400t}, & t \geq 20 \text{ мс}. \end{cases}$$

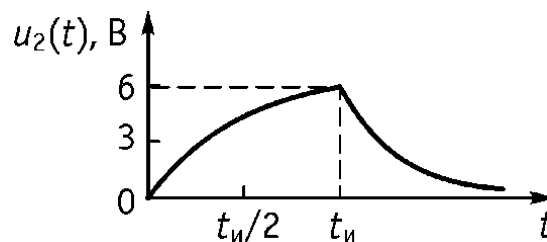


Рис. 7.11

ТЕМА 8. Частотный (спектральный) метод анализа переходных процессов в линейных электрических цепях

Лекция 14

Ряды Фурье. Теорема Парсеваля. Преобразование Фурье. Спектральный метод анализа цепей

Различают:

1. Частотный метод анализа при периодическом негармоническом воздействии, например, воздействие в виде последовательности прямоугольных импульсов или треугольных импульсов (рис. 8.1).

В этом случае входная последовательность (сигнал) представляется в виде ряда Фурье.

2. Частотный метод анализа при непериодическом негармоническом воздействии, например, воздействию в виде одиночного прямоугольного (рис. 8.2 а) или треугольного (рис. 8.2 б) импульсов. В этом случае входной сигнал представляется в виде интеграла Фурье.

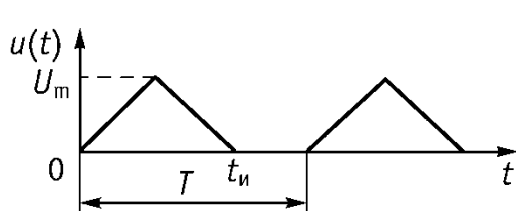
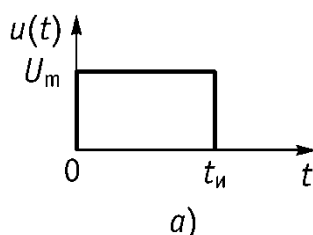
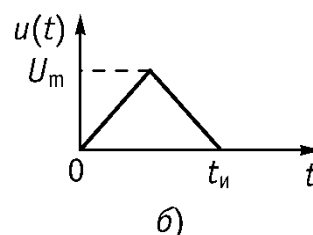


Рис. 8.1



а)



б)

Рис. 8.2

Ряды Фурье. Краткие сведения

Если функция $f(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле:

- 1) имеет на периоде конечное число разрывов первого рода;
 - 2) имеет конечное число максимумов и минимумов,
- то она может быть разложена в ряд Фурье.

Различают тригонометрическую и комплексную формы ряда Фурье

1. **Тригонометрическая форма** ($f(t)=u(t)$)

$$а) u(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \varphi_k); \quad (8.1)$$

$$б) u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)), \quad (8.2)$$

где $\frac{A_0}{2} = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$ – среднее значение функции за период (постоянная составляющая);

$a_k = A_k \cos \varphi_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(k\omega_1 t) dt$; $b_k = A_k \sin \varphi_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(k\omega_1 t) dt$;

$\omega_1 = 2\pi/T$.

2. Комплексная форма ряда Фурье

Комплексную форму получим, если в уравнение $u(t)$ пункта б) вместо $\cos(k\omega_1 t)$ и $\sin(k\omega_1 t)$ подставим их выражения в показательной форме

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \frac{e^{jk\omega_1 t} + e^{-jk\omega_1 t}}{2} + b_k \frac{e^{jk\omega_1 t} - e^{-jk\omega_1 t}}{2j} \right] = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[(a_k - jb_k) e^{jk\omega_1 t} + (a_k + jb_k) e^{-jk\omega_1 t} \right] = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\underline{A}_k e^{jk\omega_1 t} + \underline{A}_{(-k)} e^{-jk\omega_1 t} \right], \quad (8.3)$$

где $\underline{A}_k = a_k - jb_k$; $\underline{A}_{(-k)} = a_k + jb_k$.

Внесем под знак суммы слагаемое $a_0/2$, тогда получим комплексную форму ряда Фурье в виде

$$u(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{A}_k e^{jk\omega_1 t}; \quad \underline{A}_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = A(k\omega_1) e^{j\varphi(k\omega_1)}, \quad (8.4)$$

где $A(k\omega_1)$, $\varphi(k\omega_1)$ – соответственно спектры амплитуд и фаз.

Ряд Фурье последовательности прямоугольных импульсов

Пусть имеется последовательность прямоугольных импульсов (рис. 8.3).

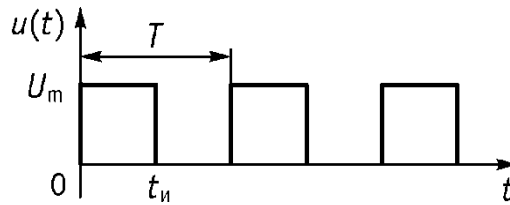


Рис. 8.3

Цель анализа: представить данную последовательность в виде ряда Фурье.

Порядок анализа

1. Определяем комплексные k -ые амплитуды напряжений

$$\begin{aligned} \underline{U}_{mk} &= \frac{2}{T} \int_0^T u(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{2}{T} \int_0^{t_n} u(t) e^{-jk\omega_1 t} dt + \frac{2}{T} \int_{t_n}^T \underbrace{u(t)}_{=0} e^{-jk\omega_1 t} dt = \\ &= \frac{2U_m t_n}{T} \left| \frac{\sin \frac{k\omega_1 t_n}{2}}{\frac{k\omega_1 t_n}{2}} \right| e^{\frac{-jk\omega_1 t_n}{2} + j \arg \left(\sin \frac{k\omega_1 t_n}{2} \right)}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

2. Находим амплитудный спектр

$$U(k\omega_1) = \frac{2U_m t_n}{T} \left| \frac{\sin(k\omega_1 t_n/2)}{k\omega_1 t_n/2} \right|, \quad k=1, 2, \dots \quad (8.6)$$

$$\text{Для } k=0 \quad \underline{U}(0) = \frac{2U_m t_n}{2}, \quad \frac{\underline{U}(0)}{2} = \frac{U_m t_n}{T}.$$

3. Находим фазовый спектр

$$\varphi(k\omega_1) = -\frac{k\omega_1 t_n}{2} + \arg \left(\sin \frac{k\omega_1 t_n}{2} \right), \quad k=1, 2, \dots \quad (8.7)$$

Видно, что амплитудный и фазовый спектры – дискретные спектры. Таким образом, последовательность прямоугольных импульсов имеет амплитудный и фазовый дискретные спектры.

4. Построим амплитудный и фазовый спектры для различных значений скважности q ($q = T/t_u$):

а) $q = T/t_u = 2$, период $T = \text{const}$, $t_u = \text{const}$, (рис. 8.4 а);

б) $q = T/t_u = 4$, период $T = \text{const}$, $t_u = \text{var}$, (рис. 8.4 б);

в) $q = T/t_u = 4$, период $T = \text{var}$, $t_u = \text{const}$, (рис. 8.4 в).

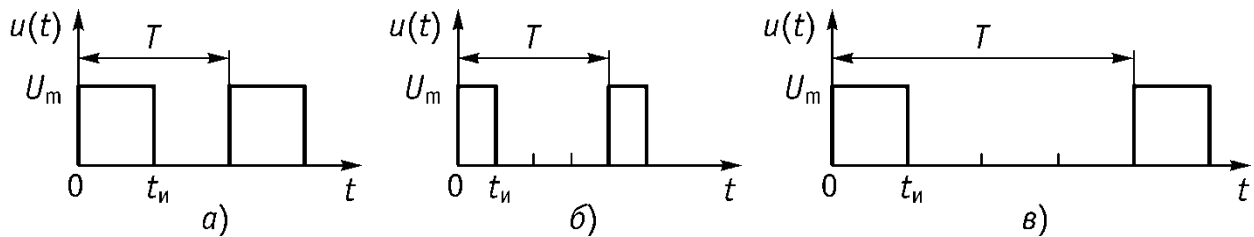


Рис. 8.4

Амплитудный и фазовый спектры для случая а) приведены на рис. 8.5 а, для случая б) – на рис. 8.5 б, для случая в) – на рис. 8.5 в.

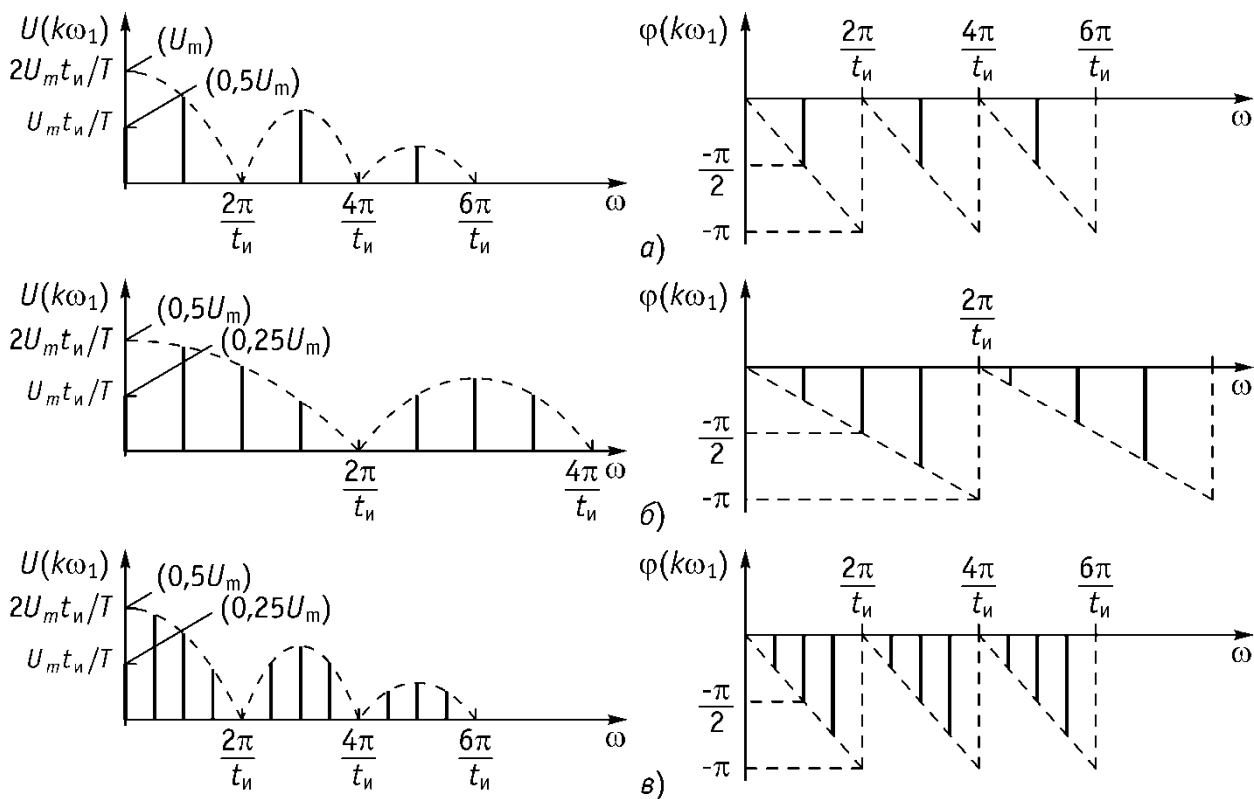


Рис. 8.5

Выводы

1. Огибающая амплитудного спектра изменяется по закону функции $\sin x/x$.
2. Огибающая имеет нули (амплитудный спектр равен нулю) на частотах $\omega = 2\pi k/t_u$ ($k = 1, 2, 3, \dots$).

3. Спектр дискретный. Расстояние по частоте между гармоническими составляющими равно $\omega_1 = 2\pi/T$.
4. Количество составляющих между нулями равно $q-1$ ($n=q-1$), где q – скважность, равная $q = T/t_n$.
5. При $T = \text{const}$ и увеличении (уменьшении) t_n расстояние между гармоническими составляющими остается постоянным, а расстояние между нулями огибающей уменьшается (увеличивается).
6. При $t_n = \text{const}$ и увеличении (уменьшении) периода T расстояние между нулями огибающей остается постоянным, а расстояние между составляющими уменьшается (увеличивается).

Действующее и среднее значения напряжения и тока периодического негармонического сигнала. Равенство (теорема) Парсеваля

1. Действующие значения тока и напряжения

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left(I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos(k\omega_1 t - \varphi_k) \right)^2 dt} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}; \quad U = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2}. \quad (8.8)$$

2. Средние значения тока и напряжения

$$I_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt = I_0; \quad U_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = U_0. \quad (8.9)$$

3. Средние значения тока и напряжения по абсолютной величине

$$I_{\text{cp абс}} = \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt; \quad U_{\text{cp абс}} = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt. \quad (8.10)$$

4. Равенство (теорема) Парсеваля

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt = U_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k^2. \quad (8.11)$$

Активная, реактивная и полная мощности периодического негармонического сигнала (при периодическом негармоническом воздействии на цепь)

1. Активная мощность

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\sum_{k=0}^{\infty} U_{mk} \cos(k\omega_1 t - \varphi_k) \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} I_{mk} \cos(k\omega_1 t - \varphi_k - \psi_k) \right) dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k \cos \psi_k, \end{aligned} \quad (8.12)$$

где ψ_k – угол между током и напряжением k -ой гармоники.

2. Реактивная мощность

$$Q = \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k \sin \psi_k. \quad (8.13)$$

3. Полная мощность

$$S = UI = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2 \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}. \quad (8.14)$$

Замечание. Для негармонического сигнала $S^2 > P^2 + Q^2$.

4. Мощность искажения $P_{\text{иск}} = \sqrt{S^2 - (P^2 + Q^2)}$.

Коэффициенты, характеризующие периодическую негармоническую функцию (сигнал)

1. Коэффициент мощности $k_M = P/S$.

2. Коэффициент формы сигнала $k_\Phi = U_1/U_{\text{ср абс}}$ (для гармонического колебания $k_\Phi = 1,11$).

3. Коэффициент искажения $k_{\text{и}} = U_1/U$, где U_1 – амплитуда первой гармоники; $U = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2}$. Для гармонического колебания $k_{\text{и}} = 1$.

4. Коэффициент амплитуды $k_a = U_m/U$ (для гармонического колебания $k_a = \sqrt{2}$).

5. Коэффициент гармоник $k_{\text{г}} = \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} U_k^2} / U_1$ (для гармонического колебания $k_{\text{г}} = 0$).

Частотный метод анализа процессов в линейных электрических цепях при непериодическом негармоническом воздействии. Прямое и обратное преобразования Фурье. Свойства и теоремы преобразования Фурье

Если функция $f(t)$ удовлетворяет: а) условию абсолютной интегрируемости $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$; б) условию вида $|f(t)| < M e^{-C_0 t}$, где M, C_0 – положительные вещественные числа, то функция $f(t)$ может быть преобразована по Фурье.

Преобразования Фурье

Прямое преобразование Фурье (ППФ) позволяет определить комплексный спектр сигнала (комплексную спектральную плотность или спектр) по формуле

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = A(\omega) - jB(\omega), \quad (8.15)$$

где $f(t)$ – функция; $F(j\omega)$ – изображение по Фурье.

Обратное преобразование Фурье (ОПФ) позволяет определить функцию времени (оригинал) по Фурье-образу

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (8.16)$$

Основные свойства преобразования Фурье

1. Если функция $f(t)$ четная, то спектр $F(j\omega)$ – вещественная величина

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt. \quad (8.17)$$

2. Если функция $f(t)$ нечетная, то спектр $F(j\omega)$ – мнимая величина

$$F(j\omega) = j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt. \quad (8.18)$$

3. Если функция $f(t)$ четная, то в спектре (в сомножителе $e^{-j\omega t}$) можно поменять « $-$ » на « $+$ »

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt. \quad (8.19)$$

4. Свойство взаимозаменяемости переменной ω и t . Для четного сигнала и вещественного спектра

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega; \quad (8.20)$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \quad (F(j\omega) \leftrightarrow f(t), \quad dt \leftrightarrow d\omega). \quad (8.21)$$

5. Сигнал $f(t)$ может быть задан с помощью своего амплитудного и фазового спектров ($|F(j\omega)|$ и $\varphi_F(\omega)$), либо с помощью вещественной и мнимой частей спектра ($A(\omega)$ и $B(\omega)$). Причем существует однозначная связь между модулем и фазой, между мнимой и действительной частями спектра. Эту связь можно показать на одностороннем сигнале

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega t d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (8.22)$$

6. Преобразование Фурье является однозначным: сигналу $f(t)$ соответствует только одно преобразование Фурье $F(j\omega)$ и преобразованию Фурье $F(j\omega)$ соответствует только один сигнал.

Основные теоремы преобразования Фурье

1. Теорема линейности

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(t) \div \sum_{k=1}^{\infty} a_k F_k(j\omega). \quad (8.23)$$

2. Сдвиг функции (сигнала) во времени

$$f(t - t_0) \div e^{-j\omega t_0} F(j\omega). \quad (8.24)$$

3. Изменение масштаба переменной t

$$f(at) \div \frac{1}{a} F\left(\frac{j\omega}{a}\right). \quad (8.25)$$

4. **Теорема свертки:** произведению двух функций (сигналов) $f_1(t)$ и $f_2(t)$ соответствует свертка их спектров

$$f_1(t) f_2(t) \div \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\Omega) F_2(j\omega - j\Omega) d\Omega. \quad (8.26)$$

5. Произведение спектров двух сигналов соответствует свертке сигналов

$$F_1(j\omega)F_2(j\omega) \div \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau. \quad (8.27)$$

6. Смещение спектра на частоту ω_1

$$F(j\omega \mp j\omega_1) \div e^{\pm j\omega_1 t} f(t). \quad (8.28)$$

7. Дифференцирование спектра

$$\frac{dF(j\omega)}{d\omega} \div (-jt)f(t). \quad (8.29)$$

8. Дифференцирование и интегрирование сигнала

$$\frac{d(f(t))}{dt} \div j\omega F(j\omega) - f(0); \quad \int_{-\infty}^t f(t)dt \div \frac{1}{j\omega} F(j\omega). \quad (8.30)$$

Лекция 15

Спектры сигналов. Частотный метод анализа

Спектры наиболее распространенных сигналов

1. Единичная импульсная функция (дельта функция $\delta(t)$)

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0. \end{cases} \quad (8.31)$$

Спектр сигнала с учетом свойств дельта-функции определяется по формуле

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \sin \omega t dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cos \omega t dt = \cos(\omega \cdot 0) = 1. \end{aligned}$$

Зная спектр дельта-функции, найдем δ -функцию

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{j\omega t} d\omega. \quad (8.32)$$

Замечание. Используя свойство взаимозаменяемости $\omega \rightarrow t$, определим дельта-функцию в частотной области

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j\omega t} dt. \quad (8.33)$$

2. Постоянная функция $f(t) = A$. Амплитудный и фазовый спектры постоянной функции

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = A 2\pi \delta(\omega). \quad (8.34)$$

3. Единичная функция (рис. 8.6 а)

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \infty, \\ 0, & -\infty < t < 0. \end{cases} \quad (8.35)$$

Данная функция не удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости, поэтому для определения спектра воспользуемся преобразованием Лапласа и теоремой Коши. Сначала представим функцию $f(t)$ в виде (теорема Коши)

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{p_k} \text{Res } F(p) e^{pt} + \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d(j\omega), \quad (8.36)$$

где Res – вычет функции $F(p) e^{pt}$.

Так как $f(t) \div F(p) = 1/p$, то вычет функции $F(p) e^{pt}$ равен единице, поэтому

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega. \quad (8.37)$$

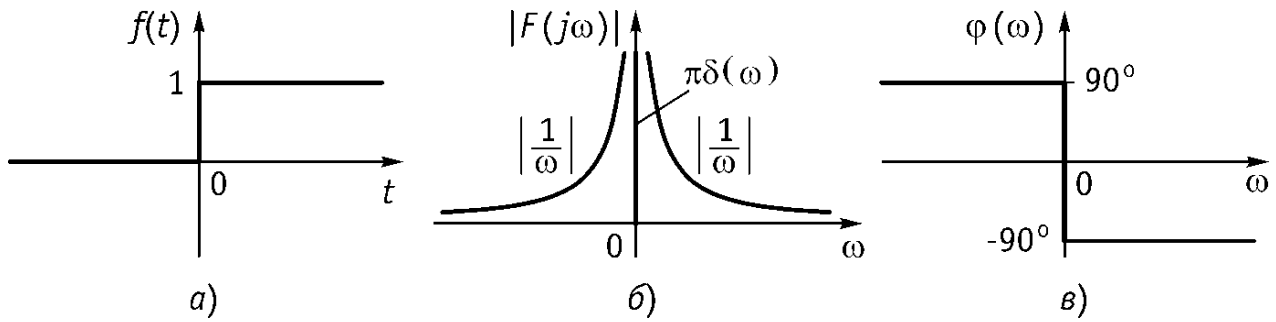


Рис. 8.6

Спектр функции состоит из спектра постоянной составляющей $1/2 \div \pi \delta(\omega)$ и спектра $1/j\omega$. Таким образом, спектр единичной функции имеет вид

$$F(j\omega) = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}. \quad (8.38)$$

Амплитудный и фазовый спектры единичной функции приведены на рис. 8.6 б и в.

4. Прямоугольный одиночный импульс

$$f(t) = \begin{cases} A_m, & 0 \leq t < t_n, \\ 0, & -\infty < t < 0, \quad t_n \leq t < \infty. \end{cases} \quad (8.39)$$

Представим прямоугольный импульс как разность двух единичных функций, сдвинутых относительно друг друга на время t_n ($f(t) = A_m 1(t) - A_m 1(t - t_n)$) (рис. 8.7).

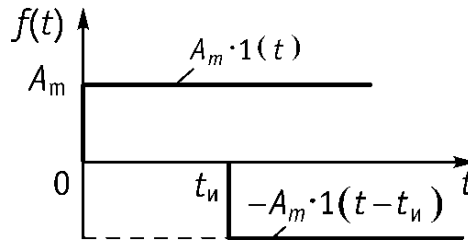


Рис. 8.7

Определим спектр прямоугольного импульса через спектр единичной функции

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= A_m \left[\left(\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right) - \left(\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t_n} \right) \right] = A_m \left[\frac{1 - e^{-j\omega t_n}}{j\omega} \right] = \\ &= \frac{A_m}{j\omega} e^{-j\omega t_n/2} (e^{j\omega t_n/2} - e^{-j\omega t_n/2}) = \frac{2A_m}{\omega} \sin \frac{\omega t_n}{2} e^{-j\omega t_n/2} = \end{aligned} \quad (8.40)$$

$$= A_m t_n \left| \frac{\sin(\omega t_n/2)}{\omega t_n/2} \right| e^{-j\omega t_n/2 + j \arg(\sin(\omega t_n/2)/(\omega t_n/2))}.$$

$$|F(j\omega)| = A_m t_n \left| \frac{\sin(\omega t_n/2)}{\omega t_n/2} \right| - \text{амплитудный спектр (рис. 8.8 а)}, \quad (8.41)$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\omega t_n}{2} + \arg\left(\sin \frac{\omega t_n}{2} / \frac{\omega t_n}{2}\right) - \text{фазовый спектр (рис. 8.8 б)}. \quad (8.42)$$

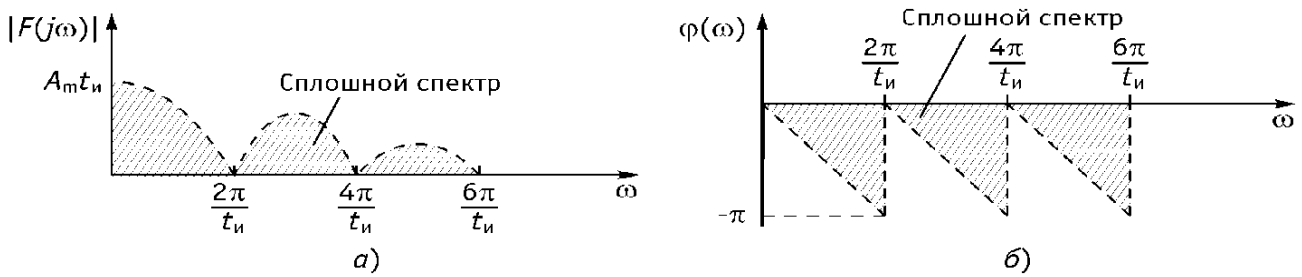


Рис. 8.8

Методы определения сигнала по спектру

1. Обратное преобразование Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (8.43)$$

2. Метод, основанный на теореме разложения функции $F(p)$ (заменяя в (8.43) $j\omega$ на p)

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}.$$

3. Метод, основанный на разложении функции $F(p)$ на простые дроби.

Замечание. Замена $j\omega$ на p всегда возможна. Замена p на $j\omega$ справедлива лишь для функций, которые удовлетворяют условию абсолютной интегрируемости.

Частотный метод анализа процессов в электрических цепях первого порядка

Пусть на вход цепи (рис. 8.9 а) подается воздействие в виде прямоугольного импульса (рис. 8.9 б).

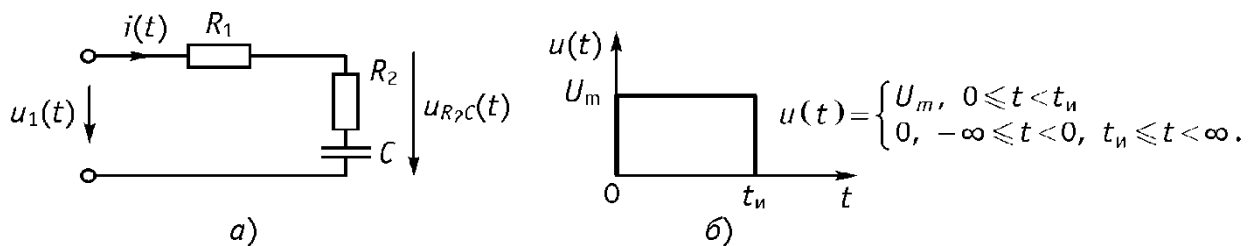


Рис. 8.9

Цель анализа: найти сигнал $u_{R_2C}(t)$.

Порядок анализа

1. Находим спектральную комплексную плотность $F(j\omega)$ прямоугольного импульса

$$F(j\omega) = \int_0^{t_n} U_m e^{-j\omega t} dt = \frac{U_m (1 - e^{-j\omega t_n})}{j\omega}. \quad (8.44)$$

2. Находим комплексную передаточную функцию цепи

$$H(j\omega) = \frac{U_{R_2C}(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{1 + j\omega R_2 C}{1 + j\omega (R_1 + R_2) C}. \quad (8.45)$$

3. Определяем спектр выходного сигнала

$$U_{R_2C}(j\omega) = H(j\omega)U_1(j\omega) = \frac{1+j\omega R_2C}{1+j\omega(R_1+R_2)C} U_m \left(\frac{1-e^{-j\omega t_n}}{j\omega} \right) =$$

$$= \frac{1+j\omega R_2C}{1+j\omega(R_1+R_2)C} \frac{U_m}{j\omega} - \frac{1+j\omega R_2C}{1+j\omega(R_2+R_1)C} \frac{e^{-j\omega t_n} U_m}{j\omega}. \quad (8.46)$$

4. Положим $U_m=1$, заменим $j\omega$ на p и перейдем к функции от p

$$U_{R_2C}(p) = \frac{1+pR_2C}{1+p(R_1+R_2)C} \frac{1}{p} - \frac{1+pR_2C}{1+p(R_1+R_2)C} \frac{e^{-pt_n}}{p} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} =$$

$$= \frac{F_{11}(p)}{pF_{22}(p)} - \frac{F_{11}(p)}{pF_{22}(p)} e^{-pt_n}. \quad (8.47)$$

5. Найдем полюсы функции $U_{R_2C}(p)$

$$(1+p(R_1+R_2)C)p=0; \quad p_1=0; \quad p_2=-\frac{1}{(R_1+R_2)C}. \quad (8.48)$$

Один корень равен нулю, следовательно, необходимо воспользоваться теоремой разложения в виде

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p)|_{p=p_k}} e^{p_k t}. \quad (8.49)$$

6. Зная полюсы, найдем оригинал (функцию), при этом воспользуемся теоремой запаздывания и формулами разложения

$$u_{R_2C}(t) = \left[\frac{F_{11}(0)}{F_{22}(0)} + \frac{F_{11}(p_k)}{p_k F_{22}'(p)|_{p=p_k}} e^{p_k t} \right] -$$

$$- \left[\frac{F_{11}(0)}{F_{22}(0)} + \frac{F_{11}(p_k)}{p_k F_{22}'(p)|_{p=p_k}} e^{p_k t} \right] e^{-p_k t_n} =$$

$$= \underbrace{\left[1 - \frac{R_1}{R_1+R_2} e^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)}} \right]}_{\text{Решение на участке } 0 \leq t < t_n} - \underbrace{\left[1 - \frac{R_1}{R_1+R_2} e^{-\frac{t-t_n}{C(R_1+R_2)}} \right]}_{\text{Решение на участке } t_n \leq t < \infty}. \quad (8.50)$$

7. График напряжения u_{R_2C} для $R_1=R_2$ и $t_n=\tau_c$, изображен на рис. 8.10.

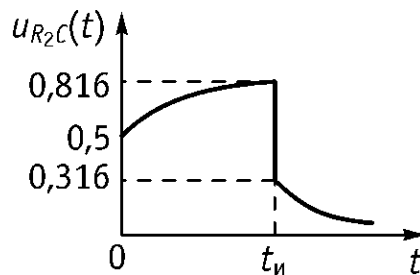


Рис. 8.10

Условия безыскаженной передачи сигнала через линейную электрическую цепь. Распределение энергии в непериодическом сигнале. Равенство Парсеваля (теорема Рэлея)

Условия безыскаженной передачи сигнала через линейную электрическую цепь

Для того чтобы, форма сигнала на выходе не менялась (пропорциональное изменение по амплитуде не является искажением), необходимо, выполнить условия: а) модуль комплексной передаточной функции $|H(j\omega)|$ должен быть постоянной величиной; б) аргумент передаточной функции должен быть линейной функцией от частоты (рис. 8.11)

$$|H(j\omega)| = K = \text{const},$$

$$\varphi_H(\omega) = -\omega t_0.$$

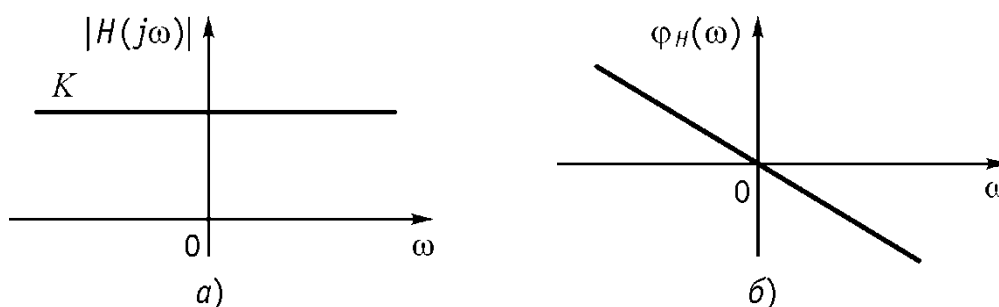


Рис. 8.11

Реализовать эти условия можно лишь идеальной линейной электрической цепью.

Установим искажения формы выходного сигнала при передаче соответственно: единичного скачка и прямоугольного импульса через электрическую цепь в виде идеального фильтра нижних частот (ФНЧ), имеющего комплексную передаточную функцию вида

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1e^{-j\omega t_0} & \text{для } -\omega_1 \leq \omega \leq \omega_1, \\ 0 & \text{для } -\infty < \omega < -\omega_1, \quad \omega_1 < \omega < \infty, \end{cases} \quad (8.51)$$

представленную на рис. 8.12.

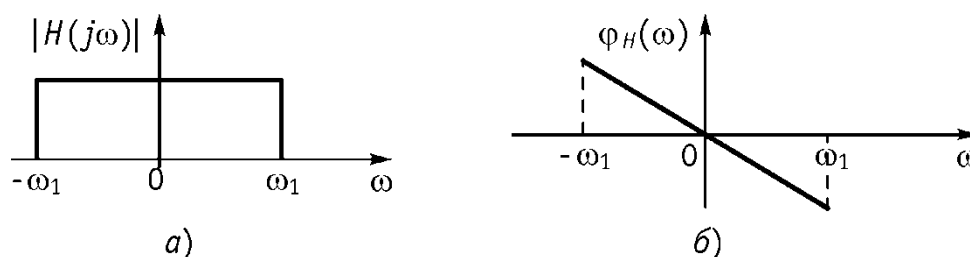


Рис. 8.12

А. Прохождение единичной функции через идеальный ФНЧ

Подадим единичную функцию (рис. 8.13) на вход ФНЧ

Цель анализа: найти выходное напряжение $u_2(t)$.

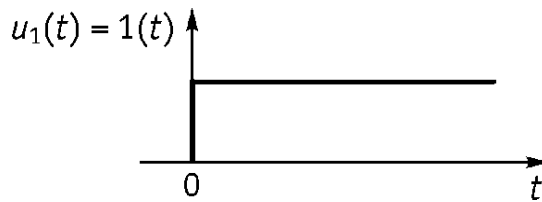


Рис. 8.13

Порядок анализа

1. Определяем спектр входного сигнала:

$$F_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} u(t) e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}. \quad (8.52)$$

2. Находим спектр выходного сигнала

$$F_2(j\omega) = F_1(j\omega) H(j\omega) = \pi\delta(\omega) e^{-j\omega t_0} + \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t_0}. \quad (8.53)$$

3. Зная спектр выходного сигнала, найдем оригинал (выходной сигнал)

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} \pi\delta(\omega) e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_1} \frac{\sin(\omega(t-t_0))}{\omega(t-t_0)} d(\omega(t-t_0)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(\omega(t-t_0)). \end{aligned} \quad (8.54)$$

4. График выходного сигнала $u_2(t)$ представлен на рис. 8.14

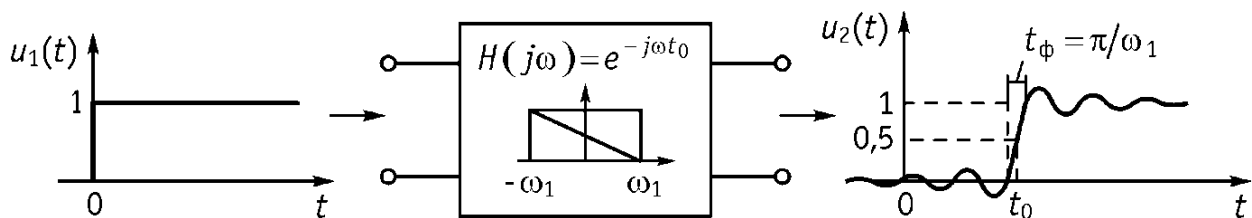


Рис. 8.14

В. Прохождение прямоугольного импульса через идеальный ФНЧ

Подадим прямоугольный импульс (рис. 8.15) на вход ФНЧ.

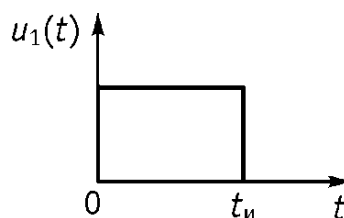


Рис. 8.15

Цель анализа: найти выходное напряжение $u_2(t)$.

Порядок анализа

1. Определяем спектр $F_1(j\omega)$ входного сигнала $u_1(t)$

$$F_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t_n}. \quad (8.55)$$

2. Определяем спектр $F_2(j\omega)$ выходного сигнала

$$F_2(j\omega) = F_1(j\omega)H(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega t_n}}{j\omega} e^{-j\omega t_0}. \quad (8.56)$$

3. Определяем выходной сигнал $u_2(t)$

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} \frac{e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t}}{j\omega} d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} \frac{e^{-j\omega(t_n+t_0)} e^{j\omega t}}{j\omega} d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \text{Si}[\omega(t-t_0)] - \frac{1}{\pi} \text{Si}[\omega(t-(t_0+t_n))]. \end{aligned} \quad (8.57)$$

4. График выходного сигнала $u_2(t)$ представлен на рис. 8.16

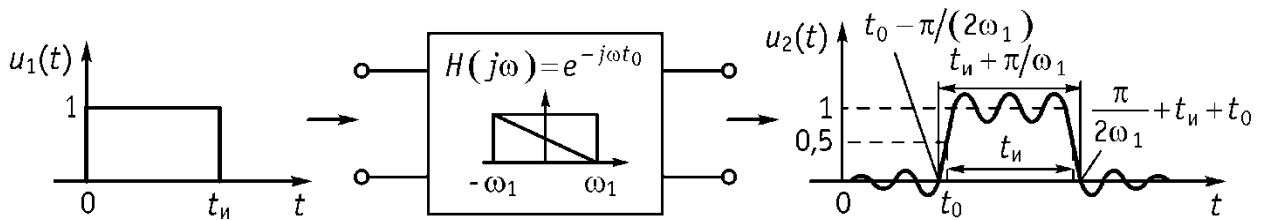


Рис. 8.16

Равенство Парсеваля (теорема Рэлея)

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega. \quad (8.58)$$

Энергия сигнала во временной области равна энергии сигнала в частотной области.

ТЕМА 9. Дискретные сигналы и дискретные цепи

Лекция 16

Дискретные сигналы и их спектры. Z-преобразование дискретных сигналов

Электрический сигнал – электрическое напряжение или ток, изменяющийся во времени и несущие сообщения о каком-либо событии.

Аналоговый сигнал – непрерывная или кусочно-непрерывная функция времени.

Дискретный сигнал – последовательность отсчетов функции $x(t)$ (аналоговой функции), взятой в определенные моменты времени: $0T, 1T, 2T, \dots, nT$, где T – интервал времени, через которые берутся отсчеты (интервал дискретизации).

Цифровой сигнал – квантованный по уровню дискретный сигнал.

Квантование по уровню – преобразование отсчетов функции в числа.

Дискретизация аналогового сигнала в частотной области – процесс преобразования спектра аналогового сигнала в последовательность частотных отсчетов.

Дискретизация аналогового сигнала во временной области осуществляется дискретизатором, простейшая схема которого представляет собой управляемый электронный ключ (рис. 9.1).

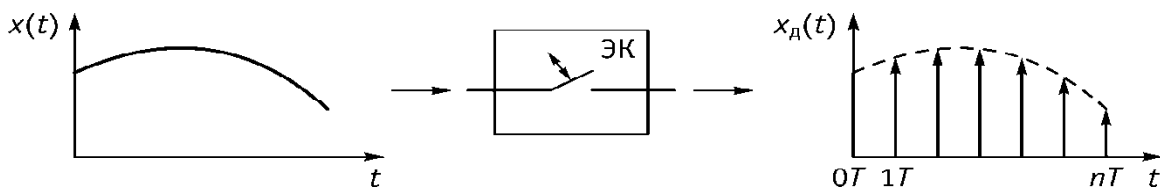


Рис. 9.1

Если спектр аналогового сигнала ограничен некоторой частотой (например, ω_B), тогда частота дискретизации $\omega_d = 2\pi/T$ определяется из условия

$$\omega_d \geq 2\omega_B.$$

Некоторые наиболее распространенные дискретные сигналы

1. Дискретный импульс – сигнал, принимающий значение, равное единице при $t = 0T$ и значение равное нулю при $t = nT, n = 1, 2, 3, \dots$ (рис. 9.2 а). Этот сигнал играет в дискретных цепях такую же роль как δ -функция в аналоговых цепях. Обозначается как $\delta(nT)$ или $x_0(nT)$, но чаще как $\delta(n)$ или $x_0(n)$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n=0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \quad (9.1)$$

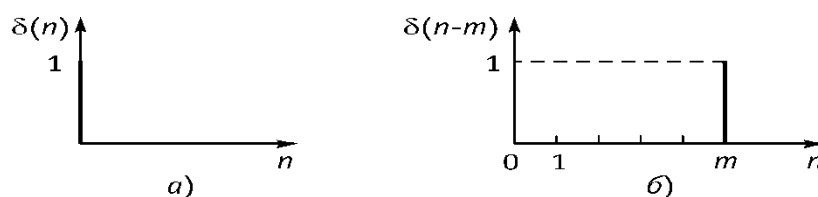


Рис. 9.2

2. Смещенный на m отсчетов дискретный импульс (рис. 9.2 б)

$$\delta(n-m) = \begin{cases} 1, & m=n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \quad (9.2)$$

С помощью дискретного импульса можно записать любой дискретный сигнал

$$x(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} x(mT) \delta(nT - mT),$$

$$x(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m) \delta(n-m). \quad (9.3)$$

3. Дискретная ступенчатая функция (аналог единичной функции) (рис. 9.3)

$$\delta_1(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (9.4)$$

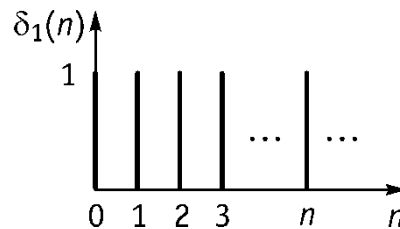


Рис. 9.3

4. Дискретный прямоугольный импульс (рис. 9.4)

$$x(m) = \delta_1(n) - \delta_1(n-m). \quad (9.5)$$

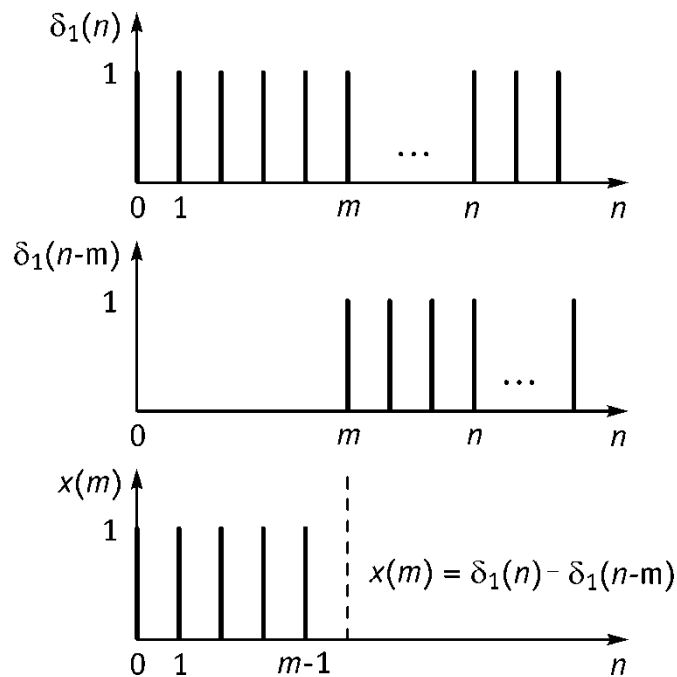


Рис. 9.4

Преобразование Фурье дискретного сигнала. Спектры дискретных непериодических сигналов

Пусть задан дискретный сигнал

$$x_{\text{д}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT). \quad (9.6)$$

Прямое преобразование Фурье дискретного сигнала имеет вид

$$X_{\text{д}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-j\omega nT}. \quad (9.7)$$

Видно, что спектр $X_{\text{д}}(j\omega)$ – периодическая функция с периодом $\omega = \omega_{\text{д}}$.

Обратное преобразование Фурье, позволяет определить отсчеты сигнала $x(nT)$

$$x(nT) = \frac{1}{\omega_{\text{д}}} \int_{-0,5\omega_{\text{д}}}^{0,5\omega_{\text{д}}} X_{\text{д}}(j\omega) e^{j\omega nT} d\omega. \quad (9.8)$$

Связь между спектром аналогового сигнала и спектром дискретизированного сигнала, полученного в результате дискретизации аналогового сигнала

$$x_{\text{д}}(t) = x(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) = x(t) \cdot f(t), \quad (9.9)$$

определяется выражением вида

$$X_{\text{д}}(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega - j\omega_{\text{д}}k) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(X\left(j\omega - j\frac{2\pi}{T}k\right) \right). \quad (9.10)$$

Из полученного выражения видно, что спектр дискретизированного сигнала представляет собой периодическое повторение спектра аналогового сигнала с периодом повторения равным частоте дискретизации $\omega_{\text{д}}$ (рис. 9.5).

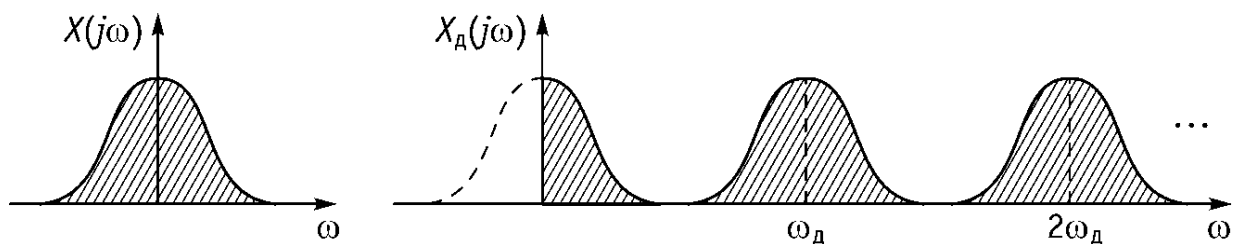


Рис. 9.5

Наложение спектров дискретизированного сигнала

Если дискретизации подвергается сигнал, спектр которого не ограничен, то периодически повторяющийся спектр дискретизированного сигнала перекрывается. Перекрывание спектра приводит к ошибкам, в результате чего искажается форма сигнала.

Если спектр аналогового сигнала конечен (высшая частота спектра равна $\omega_{\text{в}}$), то спектр дискретизированного сигнала не перекрывается, если частота

дискретизации удовлетворяет условию $\omega_d > 2\omega_B$; в этом случае аналоговый сигнал можно восстановить, зная спектр дискретизированного сигнала, если применить ФНЧ с комплексной передаточной функцией $H_\Phi(j\omega)$ и частотой среза (частотой пропускания), равной $\omega_c = 0,5\omega_d$.

Прямое и обратное дискретное преобразование Фурье периодических дискретных сигналов

Пусть имеется аналоговый сигнал $x(t)$ в виде периодической последовательности импульсов, длительность импульсов $t_{\text{имп}} = 4$ мс, период следования импульсов $T_c = 16$ мс, амплитуда импульса $U_m = 1$ В (рис. 9.6 а).

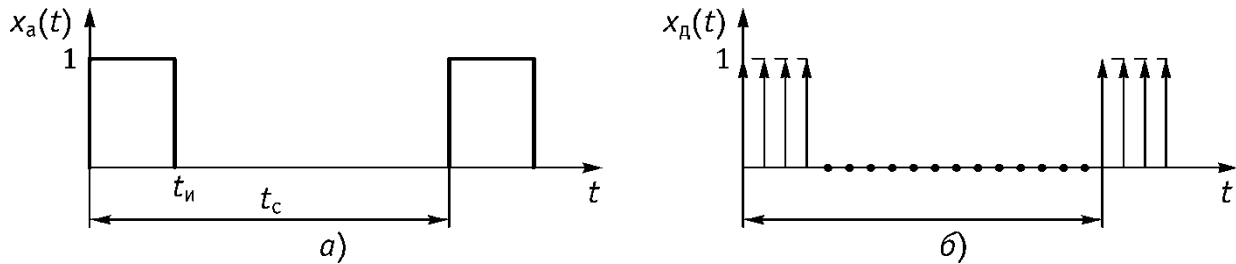


Рис. 9.6

Произведем дискретизацию периодического аналогового сигнала с периодом $T = 1$ мс, получим дискретный сигнал, приведенный на рис. 9.6 б.

Запишем дискретный сигнал математически, используя δ -функцию. В качестве последовательности можно брать фрагмент любой величины, например, равный периоду аналогового сигнала $T_c = NT$ ($N = T_c / T = 16$)

$$x_d(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) \delta(t - nT). \quad (9.11)$$

В силу периодичности аналогового сигнала, спектр дискретизированного сигнала – дискретный, а так как аналоговый сигнал дискретизирован, то спектр дискретизированного сигнала – периодический в частотной области с периодом $2\pi/T$.

Итак, дискретизированный периодический сигнал имеет периодический дискретный спектр.

Прямое дискретное преобразование Фурье

$$\underline{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}. \quad (9.12)$$

Обратное дискретное преобразование Фурье

$$x(nT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \underline{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}. \quad (9.13)$$

Замечание. ДПФ применим только к периодическому дискретному сигналу.

Теоремы (свойства) ДПФ

1. Теорема линейности

Пусть последовательности $x_1(nT)$ и $x_2(nT)$ имеют равные периоды и имеют ДПФ $x_1(nT) \div \underline{X}_1(k)$, $x_2(nT) \div \underline{X}_2(k)$, тогда

$$a_1 x_1(nT) + a_2 x_2(nT) \div a_1 \underline{X}_1(k) + a_2 \underline{X}_2(k). \quad (9.14)$$

2. Теорема задержки (сдвига) последовательности

$$\text{если } \underline{x}(n) \div \underline{X}(k), \text{ тогда } x_1(m) = x(n - n_0) \div \underline{X}(k) \exp(-j \frac{2\pi}{N} k n_0), \quad (9.15)$$

где n_0 – задержка последовательности.

3. Свойство симметрии

$$|\underline{X}_p(k)| = |\underline{X}_p(N - k)|, \quad \text{где } N - \text{период}. \quad (9.16)$$

4. Свойство периодичности

ДПФ является периодической функцией частоты, с периодом, равным N (в нормированном виде), или с периодом, равным ω_d

$$\omega_d = N 2\pi / T_c, \quad (9.17)$$

где T_c – период аналогового сигнала.

5. Свойство произведения двух периодических последовательностей:

произведение двух периодических последовательностей соответствует круговой свертке ДПФ этих последовательностей

$$x_1(n) x_2(n) \div \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \underline{X}_1(i) \underline{X}_2(k - i)_{\text{mod } N}. \quad (9.18)$$

6. Равенство Парсеваля

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^2(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\underline{X}(k)|^2. \quad (9.19)$$

7. Теорема круговой свертки периодических последовательностей

Круговой свертке периодических последовательностей соответствует произведение ДПФ последовательностей

$$x_1(n) \oplus x_2(n) \div \underline{X}_1(k) \underline{X}_2(k), \quad (9.20)$$

где $\oplus$ – знак круговой свертки.

Замечание 1. Следует иметь в виду, что круговая свертка последовательностей берется на периоде N .

Замечание 2. Круговую свертку двух периодических последовательностей не следует путать с линейной дискретной сверткой двух последовательностей, которая является основой алгоритма дискретной фильтрации.

Z-преобразование дискретных сигналов

Z-преобразование в цифровой обработке сигналов играет такую же роль, как и преобразование Лапласа при анализе аналоговых цепей и сигналов.

Z-преобразование применяется к непериодическим последовательностям. При z-преобразовании последовательности $x(n)$ ставится в соответствие функция комплексной переменной z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}, \quad (9.21)$$

где $z = e^{pT}$.

Условие сходимости z-преобразования сигнала $x(n)$

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \right| < \infty. \quad (9.22)$$

Область сходимости z-преобразования сигнала $x(n)$: те значения z , при которых выполняется условие сходимости.

Основные теоремы (свойства) z-преобразования

1. Свойство однозначности: каждой последовательности $x(n)$ соответствует одно и только одно z-преобразование.

2. Свойство линейности: если сигналы $x_1(n)$ и $x_2(n)$ имеют z-преобразования $X_1(z)$ и $X_2(z)$, тогда

$$a_1 x_1(nT) + a_2 x_2(nT) \div a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z). \quad (9.23)$$

3. Свойство задержки (сдвига): если $x(n) \div X(z)$, тогда

$$x(n-m) \div X(z) z^{-m}. \quad (9.24)$$

4. Теорема свертки: свертка сигналов $x_1(n) \oplus x_2(n)$ соответствует умножению z-преобразований сигналов

$$x_1(n) \oplus x_2(n) \div X_1(z) X_2(z). \quad (9.25)$$

5. Теорема умножения сигналов: умножение сигналов соответствует свертке z-преобразований сигналов

$$x_1(n) x_2(n) \div \frac{1}{2\pi j} \oint_l X_1(v) X_2\left(\frac{z}{v}\right) v^{-1} dv, \quad (9.26)$$

где z и v – комплексные переменные на комплексной плоскости z .

6. Теорема Парсеваля

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) X(z^{-1}) z^{-1} dz, \quad (9.27)$$

где C – контур интегрирования.

7. Теорема опережающего сдвига

$$x(n+1) \div z [X(z) - x(0)]. \quad (9.28)$$

8. Обратное z-преобразование

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz. \quad (9.29)$$

Методы определения сигнала по его z-изображению

1. Метод, основанный на определении обратного преобразования с помощью теоремы вычетов

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_c F(z) dz = \sum_{z_n} \text{Res } F(z). \quad (9.30)$$

2. Метод разложения функции $X(z)$ на простые дроби.

3. Метод непрерывного деления полинома числителя на полином знаменателя.

4. Метод разложения z-преобразования в степенной ряд (ряд Тейлора).

Преобразование точек p плоскости в точки z -плоскости

Преобразование точек p плоскости в точки z -плоскости производится по формуле $z = re^{j\theta} = e^{pT}$, при этом все точки полосы от $j0,5\omega_d$ до $-j0,5\omega_d$ в плоскости p переходят во всю плоскость z (рис. 9.7).

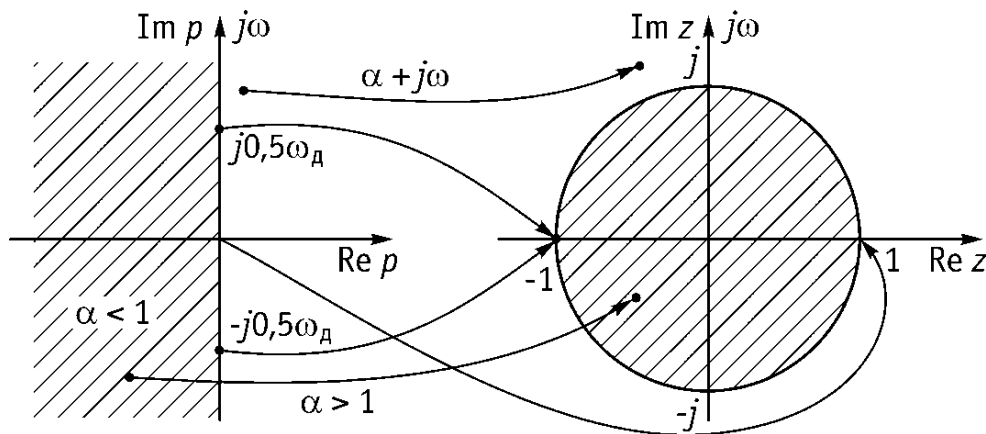


Рис. 9.7

Это приводит к эффекту наложения и к ошибкам при проектировании цифровых фильтров по аналоговому прототипу. Поэтому преобразование вида $z = e^{j\omega T} = re^{j\theta}$ непосредственно не используется при проектировании цифровых фильтров по аналоговому прототипу.

Лекция 17

Дискретные цепи

Дискретная цепь – любая система (цепь), преобразующая одну последовательность $x(n)$ в другую последовательность $y(n)$.

Свойство линейности дискретной цепи – выходная реакция на сумму дискретных сигналов равна сумме реакций на эти сигналы.

Свойство стационарности дискретной цепи – задержка входного дискретного сигнала приводит лишь к такой же задержке выходного дискретного сигнала.

Методы анализа дискретных цепей

1. Метод разностных уравнений.
2. Метод z-преобразований.
3. Дискретная свертка (линейная, круговая).
4. Спектральный метод.
5. Метод пространства состояния.

Разностные уравнения дискретных цепей

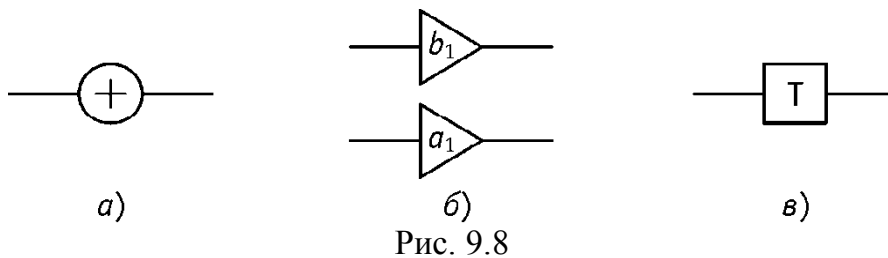
Разностные уравнения можно получить на основе дифференциального уравнения э/цепи, заменяя 1-ю производную dx/dt первой разностью $\Delta(nT)$

$$\Delta(nT) = \frac{x(nT) - x(nT - T)}{T}, \quad (9.31)$$

вторую производную d^2x/dt^2 – второй разностью $\Delta^2(nT)$

$$\Delta^2(nT) = \frac{\Delta(nT) - \Delta(nT - T)}{T} = \frac{x(nT) - 2x(nT - T) + x(nT - 2T)}{T^2} \text{ и т.д.} \quad (9.32)$$

Дискретные цепи в общем случае имеют элементы: сумматоры (рис. 9.8 а), умножители (рис. 9.8 б) и устройство задержки (рис. 9.8 в).



Рекурсивные и нерекурсивные дискретные цепи

1. Если разностное уравнение имеет как прямые, так и обратные связи

$$y(nT) = \underbrace{\sum_{m=0}^M a_m x(nT - mT)}_{\text{прямая связь}} + \underbrace{\sum_{l=1}^L b_l y(nT - lT)}_{\text{обратная связь}},$$

то ему соответствует рекурсивная дискретная цепь, представленная на рис. 9.9 а.

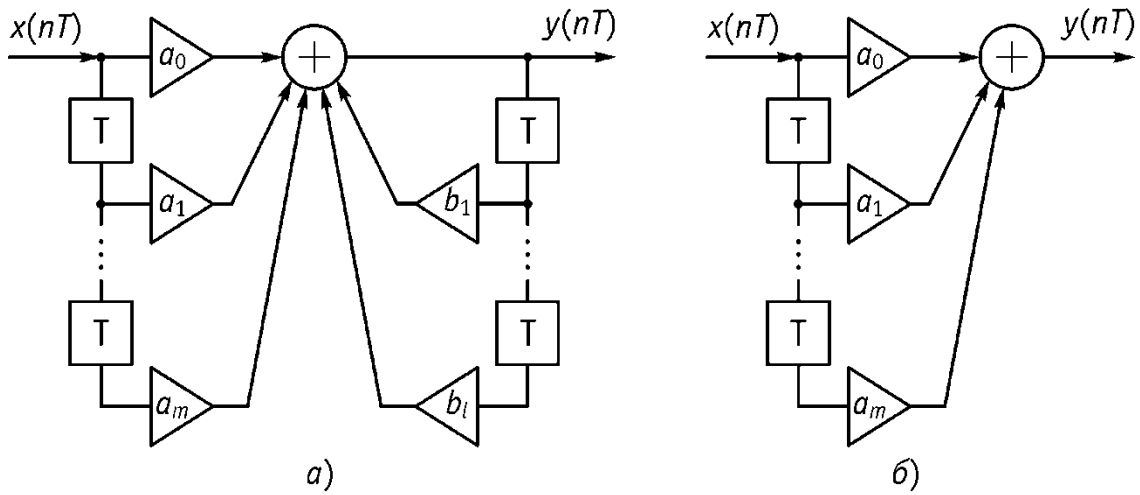


Рис. 9.9

2. Если разностное уравнение имеет только прямые связи

$$y(nT) = \sum_{m=0}^M a_m x(nT - mT), \quad (9.33)$$

то ему соответствует **нерекурсивная цепь** (рис. 9.9 б).

Формы реализации дискретной цепи на основе разностного уравнения

1. **Прямая форма** (рис. 9.9 а, б).
2. **Каноническая форма** (рис. 9.10).
3. **Транспонированная форма**.

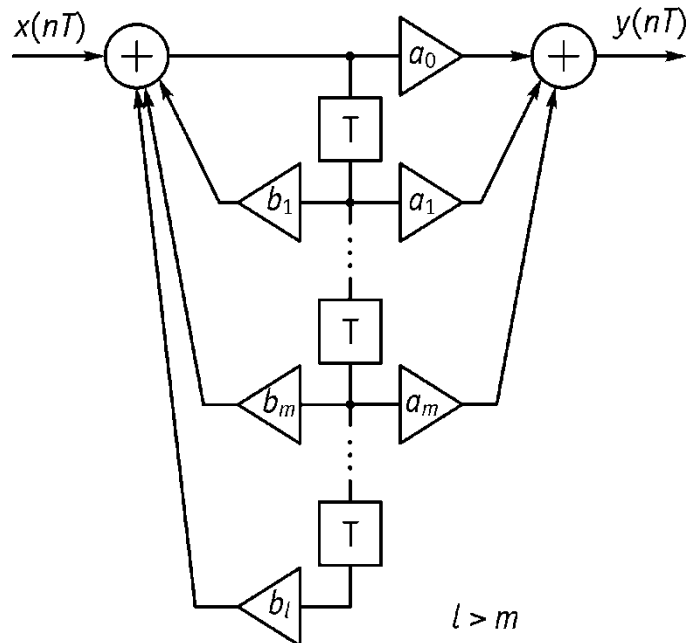


Рис. 9.10

Передаточные функции дискретной цепи

Передаточная функция дискретной цепи есть отношение z-преобразования $Y(z)$ выходного сигнала к z-преобразованию $X(z)$ входного сигнала.

Передаточная функция рекурсивной цепи имеет вид

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M a_m z^{-m}}{1 - \sum_{l=1}^L b_l z^{-l}}. \quad (9.34)$$

Передаточная функция нерекурсивной цепи имеет вид

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{m=0}^M a_m z^{-m}. \quad (9.35)$$

Поскольку передаточная функция $H(z)$ рекурсивной цепи в общем случае есть отношение полиномов, то передающую функцию можно записать, используя нули и полюсы функции $H(z)$

$$H(z) = H_0 \frac{(1 - z_{10} z^{-1}) \dots (1 - z_{M0} z^{-1})}{(1 - z_1 z^{-1}) \dots (1 - z_L z^{-1})}, \quad (9.36)$$

где H_0 – некоторый коэффициент; $z_{10}, \dots, z_{M0}$ – нули, $z_1, \dots, z_L$ – полюсы функции $H(z)$.

Передающую функцию $H(z)$ можно представить также в виде суммы простых дробей (можно разложить на простые дроби)

$$H(z) = \frac{r_1}{1 - z_1 z^{-1}} + \frac{r_2}{1 - z_2 z^{-1}} + \dots + \frac{r_L}{1 - z_L z^{-1}} + k_0 + k_1 z^{-1} + \dots + k_{(M-L)} z^{(M-L)}, \quad (9.37)$$

где $r_1, r_2, \dots, r_L$ – вычеты функции $H(z)$ в соответствующих полюсах; $k_0, \dots, k_{M-L}$ – коэффициенты, представляющие целую часть функции передачи $H(z)$.

Звенья дискретных фильтров

1. Звено 1-го порядка: нерекурсивной цепи (рис. 9.11 а), рекурсивной цепи (рис. 9.11 б).

2. Звено 2-го порядка: нерекурсивной цепи (рис. 9.11 в), рекурсивной цепи (рис. 9.11 г).

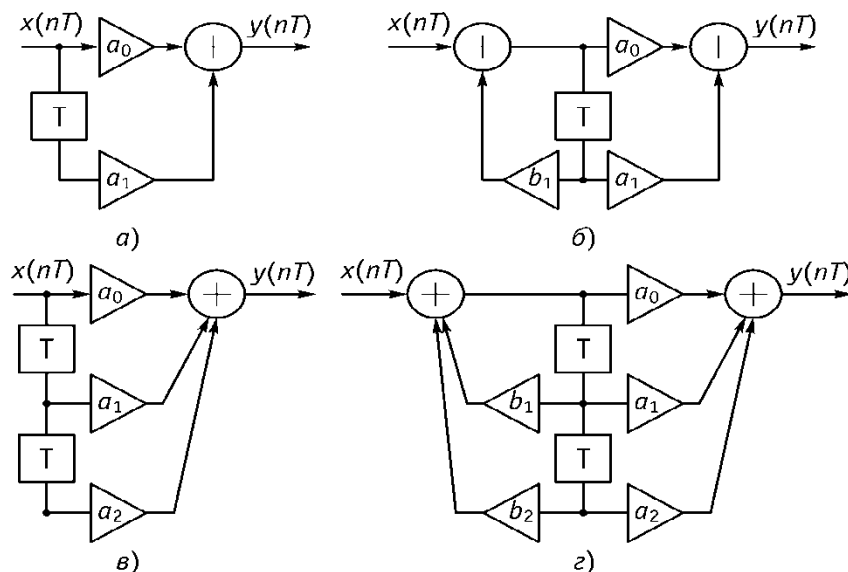


Рис. 9.11

Виды соединения дискретных фильтров (или звеньев фильтров)

1. Каскадное соединение

Передаточная функция каскадного соединения фильтров имеет вид

$$H(z) = H_1(z) \cdot \dots \cdot H_k(z). \quad (9.38)$$

2. Параллельное соединение звеньев фильтров

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) + \dots + H_k(z). \quad (9.39)$$

3. Включение фильтра (Φ_2) в обратную цепь другого фильтра (Φ_1) (рис. 9.12)

$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 - H_1(z)H_2(z)}. \quad (9.40)$$

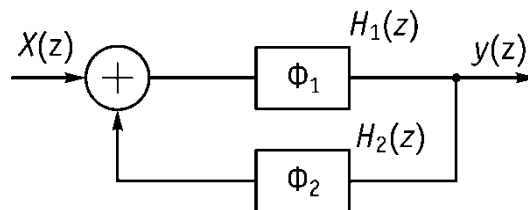


Рис. 9.12

Добротность полюсов передаточной функции $H(z)$

Пусть i -ый полюс передаточной функции равен

$$z_i = e^{p_i T} = e^{\alpha_i T} e^{j\omega_i T} = r_i e^{j\theta_i}. \quad (9.41)$$

Прологарифмируем данное выражение, получим

$$(\alpha_i T + j\omega_i T) = \ln r_i + j\theta_i. \quad (9.42)$$

Из полученного соотношения определяем добротность i -го полюса ($T=1$)

$$Q_i = \frac{\sqrt{\alpha_i^2 + \omega_i^2}}{2\alpha_i} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\theta_i}{\ln r_i} \right)^2}. \quad (9.43)$$

Условие устойчивости дискретной цепи

Дискретная цепь устойчива, если полюсы z_i находятся внутри круга единичного радиуса на комплексной плоскости z (рис. 9.13).

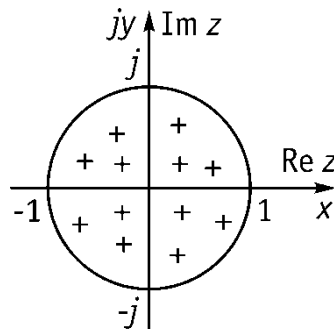


Рис. 9.13

Условия реализуемости вещественного дискретного фильтра по передаточной функции $H(z)$

1. Полюсы передаточной функции должны находиться внутри круга единичного радиуса на комплексной плоскости Z .
2. Коэффициенты a_i и b_j передаточной функции $H(z)$ должны быть действительными числами.

Комплексная частотная характеристика дискретной цепи

Комплексная частотная характеристика дискретной цепи есть отношение преобразования Фурье выходного сигнала к преобразованию Фурье входного сигнала

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{Y(e^{j\omega T})}{X(e^{j\omega T})} = H(z)|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{\sum_{m=0}^M a_m e^{-jm\omega T}}{1 - \sum_{l=1}^L b_l e^{-jl\omega T}}. \quad (9.44)$$

Частотная характеристика $H(e^{j\omega T})$ совпадает с передаточной функцией $H(z)$ на единичной окружности z -плоскости, поскольку существует связь между z -преобразованием последовательности и преобразованием Фурье этой последовательности $H(z)|_{z=e^{j\omega T}} = H(e^{j\omega T})$.

Основные свойства частотной характеристики

1. Частотные характеристики дискретных цепей являются непрерывными функциями частоты.
2. Частотные характеристики дискретных цепей являются периодическими функциями в частотной области с периодом, равным частоте дискретизации $\omega_0 = 2\pi/T$.
3. Для вещественных фильтров, передаточные функции которых имеют только вещественные коэффициенты a_i, b_j амплитудно-частотная характеристика $|H(e^{j\omega T})|$ и групповое время прохождения $\tau(\omega) = -\partial(\arg H(e^{j\omega T}))/\partial\omega$ – четные функции частоты, а фазо-частотная функция $\varphi(\omega) = \arg(H(e^{j\omega T}))$ – нечетная функция частоты ω .

Импульсная характеристика дискретной цепи

Импульсная характеристика дискретной цепи $h(nT)$ есть реакция дискретной цепи на единичную импульсную функцию.

Импульсная характеристика $h(nT)$ и комплексная частотная характеристика $H(e^{j\omega T})$ связаны между собой парой преобразований Фурье

$$h(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega T}) e^{j\omega nT} d(\omega T), \quad (9.45)$$

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) e^{-j\omega nT}. \quad (9.46)$$

Устойчивость дискретной цепи во временной области

Дискретная цепь называется устойчивой, если при любых начальных условиях реакция $y(nT)$ цепи на любое ограниченное воздействие $x(nT)$ также ограничена.

Следовательно, необходимым и достаточным условием устойчивости дискретного фильтра во временной области является абсолютная сходимость ряда отсчетов импульсной характеристики

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(nT)| < \infty. \quad (9.47)$$

Импульсная характеристика и передаточная функция дискретной цепи связаны парой z-преобразования.

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) z^{-n}, \quad (9.48)$$

$$h(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c H(z) z^{n-1} dz. \quad (9.49)$$

Методы определения импульсной характеристики по передаточной функции дискретной цепи

1. Метод, основанный на определении обратного преобразования с помощью теоремы вычетов

$$h(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c H(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_c F(z) dz = \sum_{z_n} \text{Res } F(z). \quad (9.50)$$

2. Метод разложения функции $H(z)$ на простые дроби с последующим вычислением суммы интегралов от простых дробей.

3. Метод непрерывного деления полинома числителя на полином знаменателя функции $H(z)$; позволяет получить только отсчеты импульсной характеристики.

4. Метод разложения z-преобразования в степенной ряд (ряд Тейлора); позволяет получить только отсчеты импульсной характеристики.

Метод линейной дискретной свертки

Следует заметить, что в большинстве случаев необходимым результатом на выходе системы цифровой обработки сигналов является аналоговый сигнал или выходная последовательность во временной области, которая определяется по формуле линейной дискретной свертки, поэтому линейная дискретная свертка является основой алгоритма цифровой фильтрации.

Постановка задачи: известны входной сигнал $x(nT)$, количество отсчетов сигнала N_1 и импульсная характеристика цепи $h(nT)$, количество отсчетов импульсной характеристики N_2 . Необходимо найти выходной сигнал.

Порядок анализа

1. Определяем количество отсчетов N выходного сигнала (результата линейной свертки) по формуле

$$N = N_1 + N_2 - 1. \quad (9.51)$$

2. Дополняем справа последовательность входного сигнала нулями, количество нулей равно $N_2 - 1$.

3. Дополняем справа последовательность импульсной характеристики нулями, количество нулей равно $N_1 - 1$.

4. Определяем выходную последовательность (выходной сигнал) по формуле линейной дискретной свертки

$$y(mT) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)h(mT - nT). \quad (9.52)$$

Метод круговой свертки

Метод основан на свойстве круговой свертки: свертка сигналов $x_1(n)$ и $x_2(n)$ соответствует произведению ДПФ сигналов.

$$x_1(n) \oplus x_2(n) \div \underline{X}_1(k) \underline{X}_2(k). \quad (9.53)$$

Заметим, что формула круговой свертки (9.53) применима к периодическому входному дискретному сигналу и импульсной характеристике, имеющих равные периоды N , причем круговая свертка также выполняется на периоде в N отсчетов. Для того чтобы результат круговой свертки соответствовал результату линейной свертки, период круговой свертки должен соответствовать длине линейной свертки. Алгоритм круговой свертки:

1. Вычисляем ДПФ входной последовательности $x(n)$

$$\underline{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}. \quad (9.54)$$

2. Вычисляем ДПФ импульсной характеристики $h(n)$

$$\underline{H}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(nT) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}. \quad (9.55)$$

3. Вычисляем ДПФ выходной последовательности $y(n)$

$$\underline{Y}(k) = \underline{X}(k) \underline{H}(k). \quad (9.56)$$

4. Определяем выходную последовательность по формуле обратного ДПФ

$$y(nT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \underline{Y}(k) e^{j \frac{2\pi}{N} nk}. \quad (9.57)$$

Примеры и задачи

Пример 1. Дана последовательность $x(nT) = e^{\alpha nT}$, $n = 0, 1, 2, \dots$; $\alpha < 0$. Найти спектр этой последовательности.

Решение

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-j\omega nT} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha nT} e^{-j\omega nT} = \frac{1}{1 - e^{(\alpha - j\omega)T}} =$$

$$= \frac{e^{-\arctg(e^{\alpha T} \sin \omega T / (1 - e^{\alpha T} \cos \omega T))}}{\sqrt{(1 - e^{\alpha T} \cos \omega T)^2 + (e^{\alpha T} \sin \omega T)^2}}.$$

Пример 2. Последовательность $x(nT) = e^{\alpha nT}$, $n = 0, 1, 2, \dots$; $\alpha < 0$ умножается на $e^{j\omega_1 nT}$. Найти спектр сигнала $x_1(nT) = e^{\alpha nT} e^{j\omega_1 nT}$.

Решение

Используем свойство смещения в области комплексного переменного (сдвиг спектра $X_d(j\omega)$ последовательности $x(nT)$ по оси частот)

$$X_1(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha nT} e^{-j(\omega - \omega_1)nT} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha nT} \cos(\omega - \omega_1)nT - j \sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha nT} \sin(\omega - \omega_1)nT =$$

$$\sqrt{\left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha nT} \cos(\omega - \omega_1)nT \right]^2 + \left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha nT} \sin(\omega - \omega_1)nT \right]^2} e^{-j \arctg \frac{\sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha nT} \sin(\omega - \omega_1)nT}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha nT} \cos(\omega - \omega_1)nT}}.$$

Поскольку $X_1(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{(\alpha - j(\omega - \omega_1))nT}$ является сходящейся геометрической прогрессией, спектр равен $X_1(e^{j\omega T}) = \frac{1}{1 - e^{(\alpha - j(\omega - \omega_1))T}}$. Если $\omega_1 = \pi/T$, тогда $X_1(nT) = (-1)^n e^{\alpha nT}$, и спектр равен

$$X_1(e^{j\omega T}) = \frac{1}{1 - e^{(\alpha - j(\omega - \frac{\pi}{T}))T}}.$$

Пример 3. Определить z-изображение дискретного импульса

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0 \\ 0 & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$$

Решение

Воспользуемся формулой z-изображения

$$Z(\delta(n)) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = \delta(0) z^{-0} = 1.$$

Пример 4. Определить z -изображение задержанного на m отсчетов дискретного импульса

$$\delta(n-m) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m \\ 0 & \text{при } n \neq m. \end{cases}$$

Решение

Используя теорему запаздывания, имеем

$$Z(\delta(n-m)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-m) z^{-n} = Z(\delta(n)) z^{-m} = z^{-m}.$$

Пример 5. Определить z -изображение дискретной ступенчатой функции $u(n)$

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n \geq 0 \\ 0 & \text{при } n < 0. \end{cases}$$

Решение

Воспользуемся формулой z -изображения

$$Z(u(n)) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n.$$

Если $|z| > 1$, тогда $\sum_{n=0}^{\infty} |z^{-1}|^n < \infty$ (выполняется условие сходимости) и ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n$ сходится и представляет сумму членов бесконечной геометрической прогрессии, равную

$$Z(u(n)) = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n = \frac{1}{1-z^{-1}}.$$

Пример 6. Определить z -изображение задержанной на m отсчетов дискретной ступенчатой функции $u(n-m)$

$$u(n-m) = \begin{cases} 1 & \text{при } n \geq m \\ 0 & \text{при } n < m. \end{cases}$$

Решение

Используя теорему запаздывания, имеем

$$Z(u(n-m)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n-m) z^{-n} = Z(u(n)) z^{-m} = \frac{z^{-m}}{1-z^{-1}}.$$

Пример 7. Задана последовательность

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n \geq 0 \\ 0 & \text{при } n < 0. \end{cases}$$

Определить область сходимости z -преобразования последовательности $x(n)$ и границу области сходимости.

Решение

Определяем Z-преобразование последовательности $x(n)$

$$X(z) = Z(x(n)) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n.$$

Следовательно, $X(re^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} (re^{j\omega T})^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (r^{-1})^n e^{-j\omega T n}.$

Областью сходимости являются значения z с радиусом r , для которых $\sum_{n=0}^{\infty} |r^{-1}|^n < \infty$. Это условие выполняется, если $\left| \frac{1}{r} \right| < 1$. Следовательно, областью сходимости $x(z)$ является часть Z-плоскости вне круга радиуса 1, как показано на рис. 9.14.

Граница сходимости z-преобразования последовательности $x(n)$ – это значения Z с радиусом 1. Радиус сходимости R последовательности $x(n)$ равен: $R = 1$.

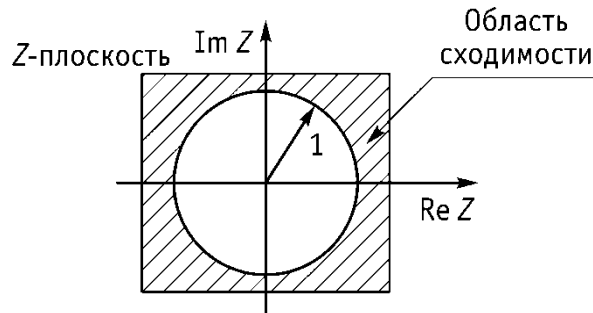


Рис. 9.14

Пример 8. Имеется периодическая последовательность $x_p(n)$ вида

$$x_p(n) = a^n \text{ для } 0 \leq n \leq N-1 \text{ и } x_p(n+mN) = x_p(n), |a| < 1,$$

где m – целое число.

Найти ДПФ периодической последовательности $x_p(n)$ и показать периодичность ДПФ.

Решение

$$\underline{X}_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} = \frac{1 - a^N e^{-j\frac{2\pi k}{N}N}}{1 - a e^{-j\frac{2\pi k}{N}}} = \frac{1 - a^N}{1 - a e^{-j\frac{2\pi k}{N}}}.$$

Покажем периодичность ДПФ:

$$\underline{X}_p(k+mN) = \frac{1 - a^N}{1 - a e^{-j\frac{2\pi(k+mN)}{N}}} = \frac{1 - a^N}{1 - a e^{-j\frac{2\pi k}{N}}} = \underline{X}_p(k).$$

Пример 9. Имеются две последовательности с периодом $N = 3$ $x_1(n) = \{0.0; 1.0; 2.0\}$ и $x_2(n) = \{1.0; -1.0; 0.0\}$ (рис. 9.15). Найти круговую свертку сигналов.

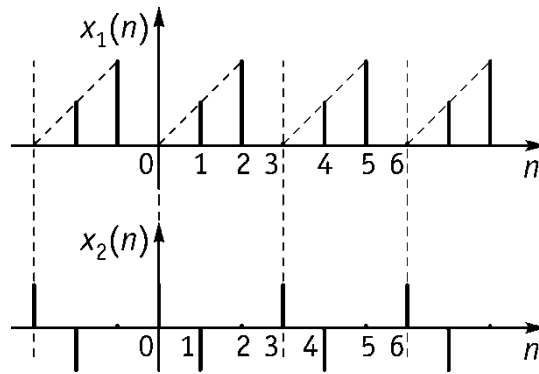


Рис. 9.15

Решение 1

Воспользуемся формулой круговой свертки

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2(n-m)_{\text{mod } N} = \sum_{m=0}^2 x_1(m) x_2(n-m)_{\text{mod } 3}.$$

$$\begin{aligned} y(0) &= x_1(0) \cdot x_2(0) + x_1(1) \cdot x_2(-1) + x_1(2) \cdot x_2(-2) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) = -2 \quad (x_2(0-k) = \{1; 0; -1\}). \\ y(1) &= x_1(0) \cdot x_2(1) + x_1(1) \cdot x_2(0) + x_1(2) \cdot x_2(-1) = 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1 \quad (x_2(1-k) = \{-1; 1; 0\}). \\ y(2) &= x_1(0) \cdot x_2(2) + x_1(1) \cdot x_2(1) + x_1(2) \cdot x_2(0) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 1 \quad (x_2(2-k) = \{0; -1; 1\}). \end{aligned}$$

$Y(n) = \{-2, 1, 1\}$. Или

$x_1(k)$	0	1	2
$x_2(0-k)$	1	0	-1
$y(0) =$	0 +	0	-2 = -2

$x_1(k)$	0	1	2
$x_2(1-k)$	-1	1	0
$y(1) =$	0 +	1 +	0 = 1

$x_1(k)$	0	1	2
$x_2(2-k)$	0	-1	1
$y(2) =$	0	-1 +	2 = 1

Решение 2

Воспользуемся формулой круговой свертки в виде

$$y_p(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2(n-m)_{\text{mod } N} \div \underline{X}_1(k) \underline{X}_2(k) = \underline{Y}_p(k).$$

1. Определяем ДПФ сигналов $x_1(n) = \{0.0; 1.0; 2.0\}$ и $x_2(n) = \{1.0; -1.0; 0.0\}$

$$\underline{X}_1(k) = \sum_{n=0}^2 x_1(n) e^{-j \frac{2\pi}{3} kn} = 0 + e^{-j \frac{2\pi}{3} k1} + 2e^{-j \frac{2\pi}{3} k2}.$$

$$\begin{aligned} X_1(0) &= 0 + 1 + 2 = 3, \quad X_1(1) = 0 + \cos 120^\circ - j \sin 120^\circ + 2 \cos 240^\circ - j 2 \sin 240^\circ = -1.5 + j 0.866, \\ X_1(2) &= 0 + \cos 240^\circ - j \sin 240^\circ + 2 \cos 480^\circ - j 2 \sin 480^\circ = -1.5 - j 0.866. \end{aligned}$$

$$\underline{X}_2(k) = \sum_{n=0}^2 x_2(n) e^{-j\frac{2\pi}{3}kn} = 1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}k1} + 0.$$

$$X_2(0) = 1 - 1 + 0 = 0, X_2(1) = 1 - \cos 120^\circ + j \sin 120^\circ = 1,5 + j0,866, \\ X_2(2) = 1 - \cos 240^\circ + j \sin 240^\circ = 1,5 - j0,866.$$

2. Определяем ДПФ выходного сигнала

$$Y(k) = X_1(k) * X_2(k) = \{0; -1,5 + j0,866; -1,5 - j0,866\} \{0; 1,5 + j0,866; 1,5 - j0,866\} = \\ = \{0; -3; -3\}.$$

3. Определяем выходную последовательность $y(n)$, используя формулу обратного ДПФ

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 Y(k) e^{-j\frac{2\pi}{3}kn} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} Y(0) e^{-j\frac{2\pi}{3}n0} + Y(1) e^{-j\frac{2\pi}{3}n1} + \\ Y(2) e^{-j\frac{2\pi}{3}n2} \end{bmatrix} =$$

$$= 1/3 \{0 - 3[\cos(n120^\circ) + j \sin(n120^\circ) - 3[\cos(n240^\circ) + j \sin(n240^\circ)]]\}.$$

$$y(0) = (1/3)(-3-3) = -2; y(1) = (1/3)(3/2 - 3j0,866 + 3/2 + 3j0,866) = 1;$$

$y(2) = (1/3)(3/2 + 3j0,866 + 3/2 - 3j0,866) = 1. Y(n) = \{-2; 1; 1\}$. Видно, что полученный результат совпадает с решением 1.

Пример 10. Разностное уравнение цепи имеет вид

$$y(nT) - 0,6y(nT - T) + 0,05y(nT - 2T) = x(nT).$$

Необходимо: 1) привести схему дискретной цепи; 2) найти выходной сигнал и два первых отсчета сигнала для нулевых начальных условий $y(-1T) = 0$ и $y(-2T) = 0$, если входной сигнал равен

$$x(nT) = e^{jn}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Решение

1. По виду разностного уравнения, учитывая прямые и обратные связи, приведем схему дискретной цепи (рис. 9.16).

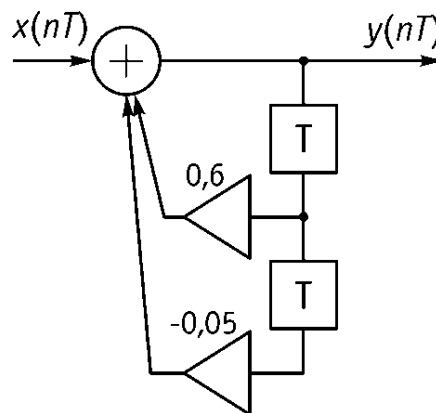


Рис. 9.16

2. Применим Z-преобразование к правой и левой частям разностного уравнения

$$Y(z) - 0,6Y(z)z^{-1} + 0,05Y(z)z^{-2} = X(z).$$

3. Найдем передаточную функцию цепи

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 0,6z^{-1} + 0,05z^{-2}}.$$

4. Найдем Z-преобразование входного сигнала

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jn}z^{-n} = \frac{1}{1 - e^jz^{-1}}.$$

5. Находим Z-преобразование выходного сигнала $Y(z)$

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{1}{1 - 0,6z^{-1} + 0,05z^{-2}} \frac{1}{1 - e^jz^{-1}}.$$

6. Определяем полюсы функции $Y(z)$

$$(1 - 0,6z^{-1} + 0,05z^{-2})(1 - e^jz^{-1}) = 0.$$

$$z_1 = 0,5, z_2 = 0,1, z_3 = e^j.$$

7. Находим вычеты и определяем сигнал $y(n)$

$$\operatorname{Res}_{z_1} F(z) = \operatorname{Res}_{z_1} (X(z)z^{n-1}) = \frac{0,5^{n+2}}{0,2 - 0,4e^j},$$

$$\operatorname{Res}_{z_2} F(z) = \operatorname{Res}_{z_2} (X(z)z^{n-1}) = \frac{0,1^{n+2}}{-0,04 + 0,4e^j},$$

$$\operatorname{Res}_{z_3} F(z) = \operatorname{Res}_{z_3} (X(z)z^{n-1}) = \frac{e^{j(n+2)}}{(e^j - 0,5)(e^j - 0,1)}.$$

$$\begin{aligned} y(n) &= \operatorname{Res}_{z_1} F(z) + \operatorname{Res}_{z_2} F(z) + \operatorname{Res}_{z_3} F(z) = \\ &= \frac{0,5^{n+2}}{0,2 - 0,4e^j} + \frac{0,1^{n+2}}{-0,04 - 0,4e^j} + \frac{e^{j(n+2)}}{(e^j - 0,5)(e^j - 0,1)}. \end{aligned}$$

8. Определяем первые два отсчета сигнала по формуле и по разностному уравнению.

По формуле:

$$\begin{aligned} y(n) &= \operatorname{Res}_{z_1} F(z) + \operatorname{Res}_{z_2} F(z) + \operatorname{Res}_{z_3} F(z) = \\ &= \frac{0,5^{n+2}}{0,2 - 0,4e^j} + \frac{0,1^{n+2}}{-0,04 - 0,4e^j} + \frac{e^{j(n+2)}}{(e^j - 0,5)(e^j - 0,1)}, \end{aligned}$$

$$y(0) = (-0,0355 + j0,7411) + (0,0122 - j0,0233) + (1,0234 - j0,7178) = 1$$

$$y(1) = \frac{0,5^3}{0,2 - 0,4e^j} + \frac{0,1^3}{-0,04 - 0,4e^j} + \frac{e^{j3}}{(e^j - 0,5)(e^j - 0,1)} = 1,1402 + j0,8415 \quad (\text{Здесь}$$

углы при экспоненте выражаются в радианах).

По разностному уравнению:

$$y(0T) = 0,6y(0T - T) - 0,05y(0T - 2T) + x(0T) = e^{j0} = 1,$$

$$y(1T) = 0,6y(T - T) - 0,05y(T - 2T) + x(1T) = 0,6 + e^{j1} = 0,6 + 0,5403 + j0,8415 = 1,1403 + j0,8415.$$

Задача 1. Имеется последовательность $x(n)$ ограниченной длительности

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{для } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{для } n < 0, n > N-1. \end{cases}$$

1. Найти ДПФ последовательности $x(n)$ при $N = 5$. 2. Построить амплитудный и фазовый спектры ДПФ. 3. Сравнить амплитудный и фазовый спектр ДПФ с амплитудным и фазовым спектрами преобразования Фурье последовательности $x(n)$.

Задача 2. Задан аналоговый сигнал в виде треугольного импульса, амплитуда сигнала равна 1 В, длительность сигнала равна 4 мкс (рис. 9.17). Определить интервал и частоту дискретизации, полагая, что граничная (верхняя) частота сигнала находится из условия, что на частотах, выше граничной, все значения модуля спектральной плотности более, чем в 10 раз меньше максимального значения.

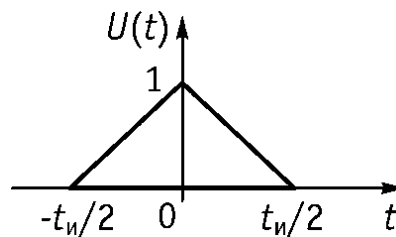


Рис. 9.17

Задача 3. Задана передаточная функция цепи $H(z) = \frac{1}{1 - 0,5z^{-1}}$. Необходи-

димо определить сумму квадратов отсчетов импульсной характеристики

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^2(nT).$$

Задача 4. Задана конечная импульсная характеристика $h(nT) = \{0.0; 1.0; 2.0\}$ дискретной цепи. Необходимо найти передаточную функцию $H(z)$ и комплексную частотную характеристику $H(e^{j\omega T})$ дискретной цепи. Построить графики АЧХ и ФЧХ дискретной цепи.

ТЕМА 10. Четырехполюсники

Лекция 18

Классификация четырехполюсников. Параметры четырехполюсников и их свойства. Уравнения передачи четырехполюсников

Четырехполюсник – электрическая цепь любой сложности, имеющая две пары зажимов (полюсов), с помощью которых она соединяется с другими участками цепи, и через которые протекают попарно равные токи. В частном случае «другими участками цепи» могут быть источник и нагрузка (рис. 10.1).

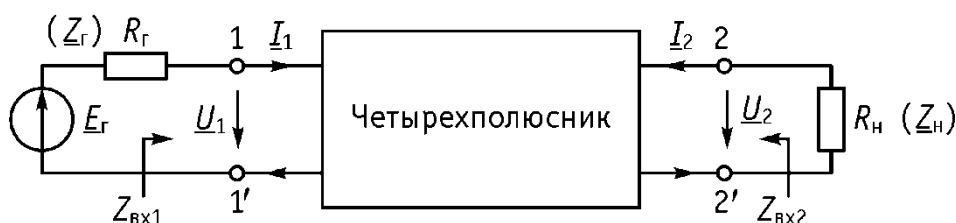


Рис. 10.1

На рис. 10.1 зажимы 1-1', 2-2' – соответственно входные и выходные зажимы четырехполюсника.

Классификация четырехполюсников

1. По свойствам и применяемым элементам четырехполюсники подразделяются на:

- а) линейные, нелинейные;
- б) активные, пассивные;
- в) автономные (независимые), неавтономные;
- г) обратимые, необратимые;
- д) симметричные, несимметричные;
- е) эквивалентные, неэквивалентные;
- ж) уравновешенные, неуравновешенные.

2. По структуре четырехполюсники подразделяются на:

- а) мостовые (с различными характеристиками);
- б) лестничные (Г-образные, Т-образные, П-образные).

Параметры (характеристики) четырехполюсников

I. Основные (первичные) параметры

$\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{Z}$, $\underline{Y}$, $\underline{H}$, $\underline{F}$.

II. Внешние (рабочие) параметры

Это такие параметры, которые характеризуют четырехполюсник, работающий в рассогласованном режиме, когда входное сопротивление четырехполюсника со стороны входных (1-1') и выходных (2-2') зажимов не равны соответственно внутреннему сопротивлению генератора $\underline{Z}_Г$ и сопротивлению нагрузки $\underline{Z}_Н$

$$\underline{Z}_{вх1} \neq \underline{Z}_Г, \quad \underline{Z}_{вх2} \neq \underline{Z}_Н. \quad (10.1)$$

К внешним параметрам относятся:

- 1) рабочая передаточная функция $\underline{H}_p$;
- 2) рабочая постоянная передачи $\underline{\Gamma}_p = A_p + jB_p$;
- 3) рабочее ослабление A_p ;
- 4) рабочая фазовая постоянная B_p ;
- 5) входные сопротивления со стороны зажимов 1-1' и 2-2': $\underline{Z}_{вх1}$ и $\underline{Z}_{вх2}$;
- 6) входные сопротивления в режимах холостого хода и короткого замыкания со стороны зажимов 1-1' и 2-2';
- 7) передаточная функция $\underline{H}$ нагруженного четырехполюсника.

III. Характеристические (собственные) параметры

Это параметры четырехполюсника, работающего в согласованном режиме, когда $\underline{Z}_{вх1} = \underline{Z}_Г$, $\underline{Z}_{вх2} = \underline{Z}_Н$.

Эти параметры могут быть получены из рабочих параметров при условии $\underline{Z}_{вх1} = \underline{Z}_Г$, $\underline{Z}_{вх2} = \underline{Z}_Н$.

К характеристическим (собственным) параметрам относятся:

- 1) характеристическая (собственная) передаточная функция $\underline{H}_c$;
- 2) характеристическая постоянная передачи $\underline{\Gamma}_c = A_c + jB_c$;
- 3) характеристическое ослабление A_c ;
- 4) характеристическая фазовая постоянная B_c ;
- 5) характеристические сопротивления $\underline{Z}_{c1}$, $\underline{Z}_{c2}$ – это входные сопротивления четырехполюсника со стороны зажимов 1-1', 2-2' при условии $\underline{Z}_{вх1} = \underline{Z}_Г$, $\underline{Z}_{вх2} = \underline{Z}_Н$.

Свойство обратимости четырехполюсника. Четырехполюсник обратимый, если для него выполняется принцип взаимности, а именно: если источник, включенный в любую l -ую ветвь электрической цепи порождает ток $\underline{I}_k$ в k -й ветви, то, будучи включенным в k -ую ветвь, этот источник порождает в l -ой ветви ток $\underline{I}_l$, равный току $\underline{I}_k$. Верно утверждение: пассивный линейный четырехполюсник является обратимым.

Условие обратимости четырехполюсника

$$\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = \underline{B}_{11}\underline{B}_{22} - \underline{B}_{12}\underline{B}_{21} = -\frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{21}} = -\frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{21}} = \frac{\underline{H}_{12}}{\underline{H}_{21}} = \frac{\underline{F}_{12}}{\underline{F}_{21}} = 1. \quad (10.2)$$

Из условия обратимости следует, что обратимый четырехполюсник характеризуется тремя независимыми основными параметрами.

Свойство симметрии. Четырехполюсник симметричен, если входные и выходные токи и напряжения не изменяются при перестановке местами входных и выходных зажимов четырехполюсника.

Условие симметрии

$$\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}} = \frac{\underline{B}_{11}}{\underline{B}_{22}} = -\frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{22}} = -\frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{22}} = \underline{H}_{12}\underline{H}_{21} - \underline{H}_{11}\underline{H}_{22} = \underline{F}_{12}\underline{F}_{21} - \underline{F}_{11}\underline{F}_{22} = 1. \quad (10.3)$$

Замечание. Условие симметрии выполняется обязательно с условием обратимости: если четырехполюсник симметричен, то он обязательно обратимый

(обратное утверждение в общем случае не верно: обратимый четырехполюсник может быть и несимметричным).

Из условия симметрии (и условия обратимости) следует, что симметричный четырехполюсник характеризуется двумя независимыми основными параметрами, другие два параметра определяются из условий симметрии и обратимости.

Уравнения передачи четырехполюсников

Это такие уравнения, которые различным образом связывают напряжения $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$ и токи $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$. Имеется шесть уравнений передачи.

Прежде чем записать уравнения передачи, оговорим следующее:

1) если четырехполюсник работает в режиме прямой передачи энергии (рис. 10.2), тогда ток $\underline{I}_2$ направлен к нагрузке и имеет обозначение $\underline{I}'_2$, причем $\underline{I}'_2 = -\underline{I}_2$;

2) если четырехполюсник работает в режиме обратной передачи энергии, тогда ток $\underline{I}_1$ направлен к нагрузке и имеет обозначение $\underline{I}'_1$, причем $\underline{I}'_1 = -\underline{I}_1$ (рис. 10.3).

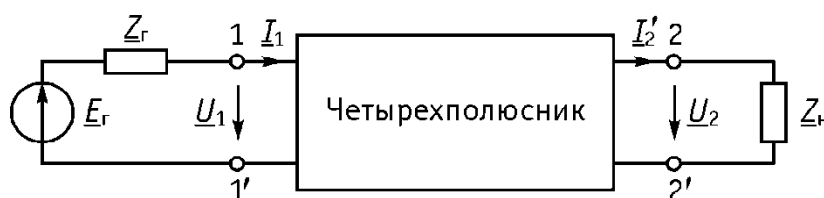


Рис. 10.2



Рис. 10.3

Замечание. Во всех остальных случаях направление напряжений и токов на входных и выходных зажимах четырехполюсника показано на рис. 10.1.

1. Уравнения передачи при прямой передаче энергии в $\underline{A}$ -параметрах

Уравнения передачи, связывающие независимые переменные $\underline{U}_2$ и $\underline{I}'_2$ с зависимыми переменными $\underline{U}_1$ и $\underline{I}_1$, имеют вид

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}'_2 \\ \underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}'_2 \end{cases} \quad (10.4)$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}'_2 \end{bmatrix} = [\underline{A}] \times \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}'_2 \end{bmatrix}, \quad (10.5)$$

где $[\underline{A}]$ – матрица А-параметров.

2. Уравнения передачи при обратной передаче энергии

Уравнения, связывающие независимые переменные $\underline{U}_1$ и $\underline{I}'_1$ с зависимыми переменными $\underline{U}_2$ и $\underline{I}_2$, имеют вид

$$\begin{cases} \underline{U}_2 = \underline{B}_{11}\underline{U}_1 + \underline{B}_{12}\underline{I}'_1 \\ \underline{I}_2 = \underline{B}_{21}\underline{U}_1 + \underline{B}_{22}\underline{I}'_1 \end{cases} \text{ или } \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{B}_{11} & \underline{B}_{12} \\ \underline{B}_{21} & \underline{B}_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}'_1 \end{bmatrix} = [\underline{B}] \times \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}'_1 \end{bmatrix}, \quad (10.6)$$

где $[\underline{B}]$ – матрица В-параметров.

Кроме этих уравнений имеются уравнения, связывающие независимые переменные $\underline{I}_1$ и $\underline{I}_2$ с зависимыми переменными $\underline{U}_1$ и $\underline{U}_2$ (система уравнений в $\underline{Y}$ -параметрах); уравнения, связывающие независимые переменные $\underline{U}_1$ и $\underline{U}_2$ с зависимыми переменными $\underline{I}_1$ и $\underline{I}_2$ (система уравнений в $\underline{Z}$ -параметрах); уравнения, связывающие независимые переменные $\underline{U}_1$ и $\underline{I}_2$ с зависимыми переменными $\underline{I}_1$ и $\underline{U}_2$ (система уравнений в $\underline{H}$ -параметрах); уравнения, связывающие независимые переменные $\underline{I}_1$ и $\underline{U}_2$ с зависимыми переменными $\underline{U}_1$ и $\underline{I}_2$ (система уравнений в $\underline{F}$ -параметрах).

При анализе последовательно соединенных четырехполусников удобно использовать $[\underline{Z}]$ матрицы

$$[\underline{Z}] = [\underline{Z}_1] + [\underline{Z}_2]. \quad (10.7)$$

При анализе каскадно соединенных четырехполусников удобно использовать $[\underline{A}]$ -матрицы

$$[\underline{A}] = [\underline{A}_1] \times [\underline{A}_2]. \quad (10.8)$$

При анализе параллельно соединенных четырехполусников удобно использовать $[\underline{Y}]$ -матрицы

$$[\underline{Y}] = [\underline{Y}_1] + [\underline{Y}_2]. \quad (10.9)$$

При анализе последовательно-параллельно соединенных четырехполусников удобно использовать $[\underline{H}]$ матрицы

$$[\underline{H}] = [\underline{H}_1] + [\underline{H}_2]. \quad (10.10)$$

При анализе параллельно-последовательно соединенных четырехполусников удобно использовать $[\underline{F}]$ матрицы

$$[\underline{F}] = [\underline{F}_1] + [\underline{F}_2]. \quad (10.11)$$

Внешние и собственные (характеристические) параметры четырехполусников. Связь характеристических параметров

Внешние параметры и характеристики четырехполусников

Внешние параметры определяются в несогласованном режиме работы четырехполусника.

1. Рабочая передаточная функция $\underline{H}_p$ – корень квадратный из отношения произведения $\underline{I}_0$ и $\underline{U}_0$ на согласованной нагрузке $\underline{Z}_{н0}$, подключенной непосредственно к выходу генератора (без четырехполусника), к произведению тока $\underline{I}_2$ и напряжения $\underline{U}_2$ на произвольной нагрузке $\underline{Z}_н$, подключенной к выходу четырехполусника

$$\begin{aligned} \underline{H}_p &= \sqrt{\frac{\underline{U}_0 \underline{I}_0}{\underline{U}_2 \underline{I}_2}} = \sqrt{\frac{|\underline{U}_0| |\underline{I}_0|}{|\underline{U}_2| |\underline{I}'_2|}} e^{jB_p} = \frac{1}{2} \left| \frac{\underline{E}_r}{\underline{U}_2} \right| \sqrt{\frac{|\underline{Z}_H|}{|\underline{Z}_r|}} e^{jB_p} = \sqrt{\frac{S_0}{S_2}} e^{jB_p} = \\ &= |\underline{H}_p| e^{jB_p} = e^{A_p + jB_p} = e^{\underline{\Gamma}_p}, \end{aligned} \quad (10.12)$$

где S_0 – полная мощность на согласованной нагрузке (рис. 10.4 а); S_2 – полная мощность на нагрузке $\underline{Z}_H$, подключенной к четырехполуснику (рис. 10.4 б).

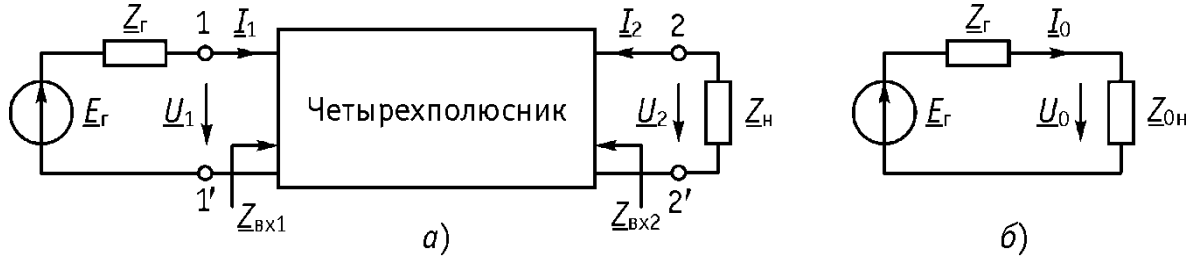


Рис. 10.4

Вместо $\underline{U}_1$ и $\underline{I}_1$ подставим в уравнение передачи для A -параметров (10.4) и полученное уравнение разделим на $\underline{U}_2$; умножив левую и правую части полученного уравнения на $(1/2)\sqrt{\underline{Z}_H/\underline{Z}_r}$, получим

$$\begin{aligned} \underline{H}_p &= \frac{1}{2} \left(\underline{A}_{11} + \underline{A}_{12} \frac{1}{\underline{Z}_H} + \underline{A}_{21} \underline{Z}_r + \underline{A}_{22} \frac{\underline{Z}_r}{\underline{Z}_H} \right) \sqrt{\frac{\underline{Z}_H}{\underline{Z}_r}} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\underline{A}_{11} \sqrt{\frac{\underline{Z}_H}{\underline{Z}_r}} + \underline{A}_{12} \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_H \cdot \underline{Z}_r}} + \underline{A}_{21} \sqrt{\underline{Z}_H \cdot \underline{Z}_r} + \underline{A}_{22} \sqrt{\frac{\underline{Z}_r}{\underline{Z}_H}} \right) = e^{\underline{\Gamma}_p} = |\underline{H}_p| e^{jB_p}. \end{aligned} \quad (10.13)$$

2. Рабочая постоянная передачи $\underline{\Gamma}_p = A_p + jB_p$ определяется как натуральный логарифм рабочей передаточной функции

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma}_p = A_p + jB_p &= \ln(\underline{H}_p) = \ln \frac{1}{2} \left(\underline{A}_{11} \sqrt{\frac{\underline{Z}_H}{\underline{Z}_r}} + \underline{A}_{12} \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_H \cdot \underline{Z}_r}} + \underline{A}_{21} \sqrt{\underline{Z}_H \cdot \underline{Z}_r} + \underline{A}_{22} \sqrt{\frac{\underline{Z}_r}{\underline{Z}_H}} \right) = \\ &= \ln \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\underline{Z}_H}{\underline{Z}_r}} \frac{\underline{E}_r}{\underline{U}_2} \right) = \ln \frac{\underline{E}_r}{2 \underline{U}_2} + \frac{1}{2} \ln \frac{\underline{Z}_H}{\underline{Z}_r} = \frac{1}{2} \ln \frac{\underline{U}_0 \underline{I}_0}{\underline{U}_2 \underline{I}'_2} \end{aligned} \quad (10.14)$$

3. Рабочее ослабление

$$\begin{aligned} A_p = \text{Re} \underline{\Gamma}_p &= \ln |\underline{H}_p| = \ln \left(\frac{1}{2} \left| \frac{\underline{E}_r}{\underline{U}_2} \right| \right) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\underline{Z}_H}{\underline{Z}_r} \right| = \frac{1}{2} \ln \frac{S_0}{S_2} = \\ &= \ln \left| \frac{1}{2} \left(\underline{A}_{11} \sqrt{\frac{\underline{Z}_H}{\underline{Z}_r}} + \underline{A}_{12} \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_H \cdot \underline{Z}_r}} + \underline{A}_{21} \sqrt{\underline{Z}_H \cdot \underline{Z}_r} + \underline{A}_{22} \sqrt{\frac{\underline{Z}_r}{\underline{Z}_H}} \right) \right| [\text{Нп}] \end{aligned} \quad (10.15)$$

$$\text{или } A_p = 20 \lg \left| \frac{\underline{E}_r}{2 \underline{U}_2} \right| + 10 \lg \left| \frac{\underline{Z}_H}{\underline{Z}_r} \right| [\text{дБ}]. \quad (10.16)$$

4. Рабочая фазовая постоянная

$$B_p = \text{Im} \underline{\Gamma}_p = \arg \underline{H}_p = \frac{\varphi_{I_0} - \varphi_{I_2}}{2} + \frac{\varphi_{U_0} - \varphi_{U_2}}{2} [\text{рад}]. \quad (10.17)$$

5. Входные сопротивления четырехполюсника со стороны входных (1-1') и выходных (2-2') зажимов

$$\underline{Z}_{\text{BX1}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}'_2}{\underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}'_2} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_\text{H} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_\text{H} + \underline{A}_{22}}, \quad (10.18)$$

$$\underline{Z}_{\text{BX2}} = \frac{\underline{B}_{11}\underline{U}_1 + \underline{B}_{12}\underline{I}'_1}{\underline{B}_{21}\underline{U}_1 + \underline{B}_{22}\underline{I}'_1} = \frac{\underline{B}_{11}\underline{Z}_\Gamma + \underline{B}_{12}}{\underline{B}_{21}\underline{Z}_\Gamma + \underline{B}_{22}} = \frac{\underline{A}_{22}\underline{Z}_\Gamma + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_\Gamma + \underline{A}_{11}}. \quad (10.19)$$

Характеристические (собственные) параметры четырехполюсника

Характеристические параметры определяются в согласованном режиме работы четырехполюсника ($\underline{Z}_{\text{BX1}} = \underline{Z}_\Gamma$, $\underline{Z}_{\text{BX2}} = \underline{Z}_\text{H}$).

1. Характеристические (собственные) сопротивления ($\underline{Z}_{\text{c1}}$ и $\underline{Z}_{\text{c2}}$) четырехполюсника – входные сопротивления со стороны входных (1-1') и выходных (2-2') зажимов четырехполюсника, работающего в согласованном режиме

$$\underline{Z}_{\text{c1}} = \underline{Z}_{\text{BX1}} \Big|_{\substack{\underline{Z}_{\text{BX1}}=\underline{Z}_\Gamma \\ \underline{Z}_{\text{BX2}}=\underline{Z}_\text{H}}} = \frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{Z}_{\text{c2}} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{Z}_{\text{c2}} + \underline{A}_{22}}, \quad \underline{Z}_{\text{c2}} = \underline{Z}_{\text{BX2}} \Big|_{\substack{\underline{Z}_{\text{BX1}}=\underline{Z}_\Gamma \\ \underline{Z}_{\text{BX2}}=\underline{Z}_\text{H}}} = \frac{\underline{A}_{22} \cdot \underline{Z}_{\text{c1}} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{Z}_{\text{c1}} + \underline{A}_{11}}. \quad (10.20)$$

Из этих соотношений выразим характеристические сопротивления через A -параметры и через параметры холостого хода и короткого замыкания

$$\underline{Z}_{\text{c1}} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{A}_{22}}} = \sqrt{\underline{Z}_{\text{1xx}} \underline{Z}_{\text{1кз}}}, \quad \underline{Z}_{\text{c2}} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22} \cdot \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{A}_{11}}} = \sqrt{\underline{Z}_{\text{2xx}} \underline{Z}_{\text{2кз}}}; \quad \frac{\underline{Z}_{\text{c1}}}{\underline{Z}_{\text{c2}}} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}}. \quad (10.21)$$

Для симметричных четырехполюсников $\underline{Z}_{\text{c1}} = \underline{Z}_{\text{c2}}$.

2. Характеристическая (собственная) передаточная функция $\underline{H}_\text{c}$

Может быть получена из рабочей передаточной функции $\underline{H}_\text{p}$, если в выражение для $\underline{H}_\text{p}$ подставить вместо $\underline{Z}_\Gamma$ и $\underline{Z}_\text{H}$ выражения вида $\underline{Z}_\Gamma = \underline{Z}_{\text{c1}}$; $\underline{Z}_\text{H} = \underline{Z}_{\text{c2}}$

$$\begin{aligned} \underline{H}_\text{c} &= \underline{H}_\text{p} \Big|_{\substack{\underline{Z}_\Gamma=\underline{Z}_{\text{c1}} \\ \underline{Z}_\text{H}=\underline{Z}_{\text{c2}}}} = \sqrt{\frac{(\underline{I}_1 \underline{U}_1)}{(\underline{I}'_2 \underline{U}_2)}} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\underline{A}_{11} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{\text{c2}}}{\underline{Z}_{\text{c1}}}} + \underline{A}_{12} \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{\text{c1}} \cdot \underline{Z}_{\text{c2}}}} + \underline{A}_{21} \sqrt{\underline{Z}_{\text{c1}} \cdot \underline{Z}_{\text{c2}}} + \underline{A}_{22} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{\text{c1}}}{\underline{Z}_{\text{c2}}}} \right). \end{aligned} \quad (10.22)$$

Подставим в полученную формулу вместо $\underline{Z}_{\text{c1}}$ и $\underline{Z}_{\text{c2}}$ их выражения через A -параметры, получим характеристическую функцию в виде

$$\begin{aligned} \underline{H}_\text{c} &= \sqrt{\underline{A}_{11} \cdot \underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21}} = |\underline{H}_\text{c}| e^{jB_\text{c}} = \\ &= \left| \sqrt{\underline{A}_{11} \cdot \underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21}} \right| e^{jB_\text{c}} = e^{A_\text{c} + jB_\text{c}} = e^{\underline{\Gamma}_\text{c}}. \end{aligned} \quad (10.23)$$

3. Характеристическая постоянная передачи $\underline{\Gamma}_\text{c}$

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma}_\text{c} &= \ln \underline{H}_\text{c} = A_\text{c} + jB_\text{c} = \ln \left(\frac{1}{2} \frac{\underline{E}_\Gamma}{\underline{U}_2} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{\text{c2}}}{\underline{Z}_{\text{c1}}}} \right) = \ln \left(\sqrt{\frac{\underline{I}_1 \underline{U}_1}{\underline{I}'_2 \underline{U}_2}} \right) = \ln \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{\text{c2}}}{\underline{Z}_{\text{c1}}}} \right) = \\ &= \ln \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} e^{j((\varphi_{U1} - \varphi_{U2}) + (\varphi_{I1} - \varphi_{I2}))} = \ln \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}'_2} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{\text{c1}}}{\underline{Z}_{\text{c2}}}} \right) = \ln \left(\sqrt{\underline{A}_{11} \cdot \underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21}} \right), \end{aligned} \quad (10.24)$$

где S_1, S_2 – полные мощности на входе и выходе четырехполюсника.

Для симметричного четырехполюсника

$$\Gamma_c = \ln(\underline{U}_1 / \underline{U}_2) = \ln(\underline{I}_1 / \underline{I}'_2). \quad (10.25)$$

4. Характеристическое ослабление

$$\underline{A}_c = \operatorname{Re} \Gamma_c = \ln |\underline{H}_c| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\underline{U}_1 \underline{I}_1}{\underline{U}_2 \underline{I}'_2} \right| = \frac{1}{2} \ln \frac{S_1}{S_2} = \ln \left| \sqrt{\underline{A}_{11} \cdot \underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21}} \right|. \quad (10.26)$$

5. Характеристическая фазовая постоянная

$$\underline{B}_c = \operatorname{Im} \Gamma_c = \arg \underline{H}_c = \frac{1}{2} [(\varphi_{U_1} - \varphi_{U_2}) + (\varphi_{I_1} - \varphi_{I'_2})]. \quad (10.27)$$

Связь основных A -параметров с характеристическими параметрами

1. Связь A -параметров с характеристическими сопротивлениями $\underline{Z}_{c1}$, $\underline{Z}_{c2}$ и постоянной передачи Γ_c . Эту связь установим из соотношений

$$\underline{Z}_{c1} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{A}_{22}}}, \quad \underline{Z}_{c2} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22} \cdot \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{A}_{11}}}, \quad \underline{A}_{11} \cdot \underline{A}_{22} = \operatorname{ch}^2 \Gamma_c, \quad \underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21} = \operatorname{sh}^2 \Gamma_c. \quad (10.28)$$

$$\begin{aligned} \underline{A}_{11} &= \operatorname{ch} \Gamma_c \sqrt{\frac{\underline{Z}_{c1}}{\underline{Z}_{c2}}}; \quad \underline{A}_{12} = \operatorname{sh} \Gamma_c \sqrt{\underline{Z}_{c1} \cdot \underline{Z}_{c2}}; \\ \underline{A}_{21} &= \operatorname{sh} \Gamma_c \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{c1} \cdot \underline{Z}_{c2}}}; \quad \underline{A}_{22} = \operatorname{ch} \Gamma_c \sqrt{\frac{\underline{Z}_{c2}}{\underline{Z}_{c1}}}. \end{aligned} \quad (10.29)$$

2. Связь A -параметров с параметрами холостого хода $\underline{Z}_{xx1}$, $\underline{Z}_{xx2}$ и короткого замыкания $\underline{Z}_{кз1}$, $\underline{Z}_{кз2}$

$$\begin{aligned} \underline{A}_{11} &= \sqrt{\frac{\underline{Z}_{xx1}}{\underline{Z}_{xx2} - \underline{Z}_{кз2}}}; \quad \underline{A}_{12} = \underline{A}_{11} \underline{Z}_{кз2}; \\ \underline{A}_{21} &= \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{Z}_{xx1}}; \quad \underline{A}_{22} = \underline{A}_{11} \frac{\underline{Z}_{xx2}}{\underline{Z}_{xx1}} = \frac{\underline{A}_{11} \underline{Z}_{кз2}}{\underline{Z}_{кз1}}. \end{aligned} \quad (10.30)$$

Характеристические параметры каскадно соединенных четырехполюсников (рис. 10.5).

$$\Gamma_c = \sum_{i=1}^n \Gamma_{ci}; \quad B_c = \sum_{i=1}^n B_{ci}; \quad A_c = \sum_{i=1}^n A_{ci}. \quad (10.31)$$

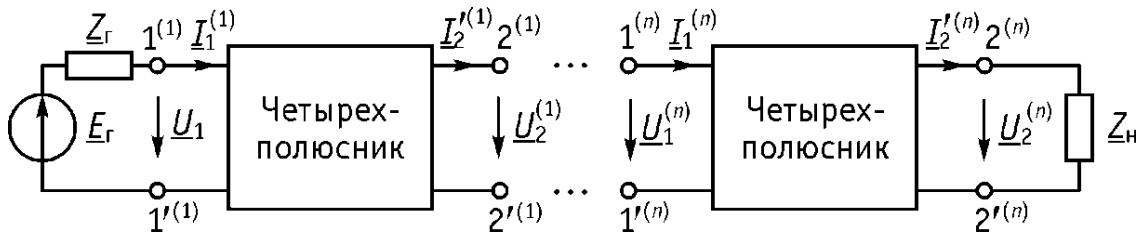


Рис. 10.5

ТЕМА 11. Нелинейные электрические цепи в режиме постоянного тока

Лекция 19

Двухполюсные нелинейные элементы. Методы анализа цепей с двухполюсными нелинейными элементами

Нелинейные электрические цепи – это цепи, у которых реакция и воздействие связаны нелинейными зависимостями и которые содержат нелинейные элементы.

Нелинейный элемент – это элемент, у которого реакция непропорционально зависит от воздействия.

Для нелинейных электрических цепей не соблюдаются:

- 1) принцип взаимности (обратимости); 2) принцип суперпозиции;
- 3) закон Ома.

Нелинейные электрические цепи позволяют создать отрицательное сопротивление, дополнительные спектральные составляющие, которых не было во входном сигнале (в воздействии).

Характеристики нелинейного элемента являются функциями одной или нескольких переменных, они не могут быть описаны с помощью постоянных коэффициентов.

Классификация нелинейных элементов

1. По количеству зажимов нелинейные элементы подразделяются на:

а) двухполюсные; б) четырехполюсные; в) шестиполюсные; г) многополюсные.

2. По способности накапливать (не накапливать) энергию на:

а) резистивные; б) реактивные.

3. По зависимости искажений от частоты на:

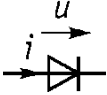
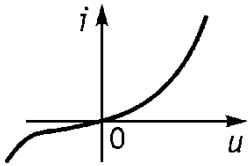
а) инерционные; б) безынерционные.

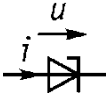
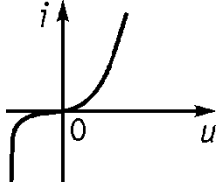
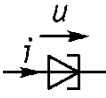
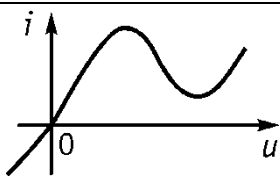
Будем рассматривать безынерционные резистивные двухполюсные нелинейные элементы (диоды) и четырехполюсные нелинейные элементы (транзисторы).

Двухполюсные нелинейные элементы, их параметры и характеристики

Условное обозначение и вольт-амперные характеристики некоторых нелинейных элементов приведены в табл. 11.1.

Табл. 11.1

Тип двухполюсника	Условное обозначение	ВАХ
1. Полупроводниковые диоды а) выпрямительный		

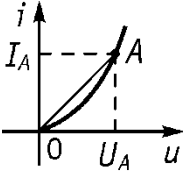
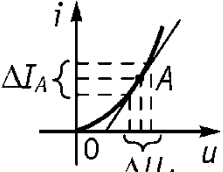
б) стабилитронный		
в) туннельный		

К характеристикам двухполюсных нелинейных элементов относится ВАХ, которая приводится в справочнике на эти элементы или (если нет в справочнике) определяется экспериментально.

К параметрам диодных нелинейных элементов относятся статическое и динамическое сопротивления.

1. Статическое сопротивление $R_{ст}$ (статическая проводимость $G_{ст}$) определяется из ВАХ в рабочей точке A (рис. 11.1 а) следующим образом

$$R_{ст} = \frac{U_A}{I_A}, \quad G_{ст} = \frac{1}{R_{ст}}. \quad (11.1)$$

а)
б)

Рис. 11.1

2. Динамическое (дифференциальное) сопротивление $R_{диф}$. Определяется следующим образом. На ВАХ выбирается рабочая точка, проводится касательная (рисунок 11.1 б). Сопротивление определяется как

$$R_{диф} = \lim_{\Delta i \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta i} = \frac{du}{di} \quad \left(\text{приблизительно } R_{диф} = \frac{\Delta u}{\Delta i} \right). \quad (11.2)$$

Крутизна S – величина обратная дифференциальному сопротивлению

$$S = \frac{di}{du} = \frac{1}{R_{диф}} = G_{диф} \quad \left(\text{приблизительно } S = \frac{\Delta i}{\Delta u} \right) - \quad (11.3)$$

единица измерения крутизны – сименс (См).

Крутизна может быть больше либо меньше нуля в зависимости от знака производной.

Преобразование нелинейных электрических цепей с двухполюсными нелинейными элементами

1. Последовательное соединение элементов.

Последовательное соединение сопротивления R и нелинейного элемента НЭ с заданной ВАХ (рис. 11.2 а).

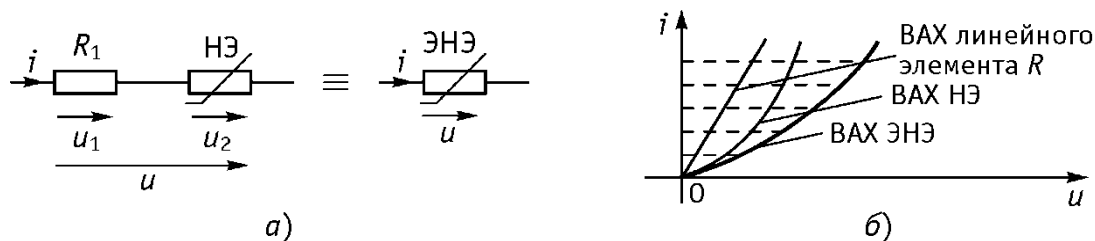


Рис. 11.2

Цель анализа: найти ВАХ эквивалентного нелинейного элемента (ЭНЭ).

Порядок анализа

1. Строим на графике ВАХ НЭ и ВАХ сопротивления R .
2. Поскольку элементы соединены последовательно, то применим ЗНК и выполним сложение напряжений графиков для различных токов и построим ВАХ эквивалентного нелинейного элемента (ЭНЭ) (рис. 11.2 б).

Параллельное соединение линейного сопротивления и нелинейного элемента с заданной ВАХ (рис. 11.3 а).

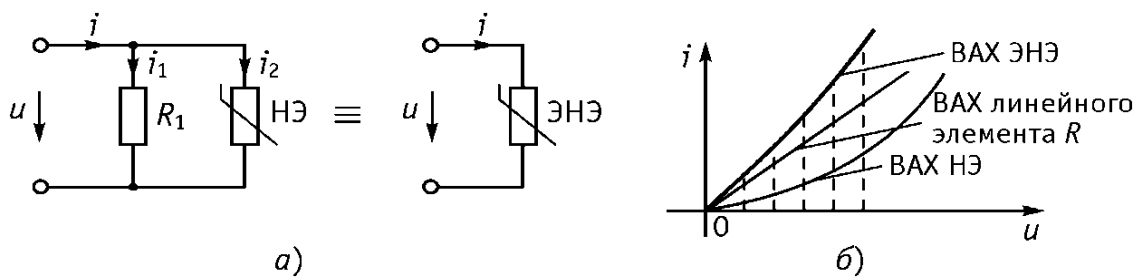


Рис. 11.3

Цель анализа: определить ВАХ эквивалентного нелинейного элемента.

Порядок анализа

1. Строим графики ВАХ НЭ и ВАХ сопротивления R .
2. Поскольку нелинейный элемент и резистор R соединены параллельно, то применим ЗТК и произведем сложение токов для различных напряжений и построим ВАХ эквивалентного нелинейного элемента (рис. 11.3 б).

Методы расчета электрических цепей с двухполюсными нелинейными элементами

Графоаналитический метод

Пусть имеется электрическая цепь с двухполюсным нелинейным элементом (рис. 11.4 а) и заданной ВАХ (рис. 11.4 б).

Цель анализа: найти ток в цепи и напряжения на элементах схемы.

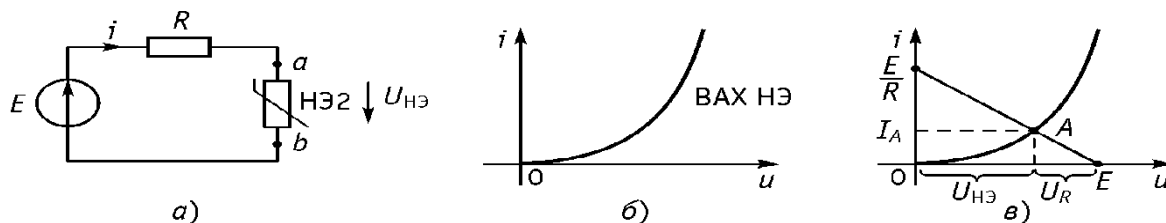


Рис. 11.4

Порядок анализа

1. Составляем ЗНК

$$iR + U_{\text{НЭ}} = E. \quad (11.4)$$

2. Определяем ток

$$i = \frac{E - U_{\text{НЭ}}}{R}. \quad (11.5)$$

3. На графике ВАХ нелинейного элемента (рис. 11.4 в) строим график зависимости тока от напряжения $U_{\text{НЭ}}$

$$U_{\text{НЭ}} = 0 \rightarrow i = E/R; \quad U_{\text{НЭ}} = E \rightarrow i = 0. \quad (11.6)$$

4. Находим точку пересечения (А) прямой тока и ВАХ НЭ. Определяем ток I_A и напряжение на элементах в цепи.

Метод законов Кирхгофа

Пусть задана электрическая схема (рис. 11.5).

Цель анализа: найти токи в ветвях и напряжения на элементах.

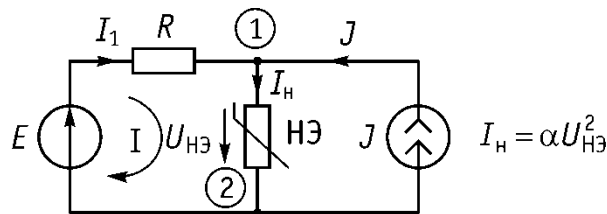


Рис. 11.5

Порядок анализа

1. Составляем ЗТК для узла 1

$$-I_1 - J + I_{\text{н}} = 0. \quad (11.7)$$

2. Составляем ЗНК для контура I

$$E = I_1 R + U_{\text{НЭ}}. \quad (11.8)$$

3. Подставим в ЗНК ток I_1 из ЗТК

$$E = (I_{\text{н}} - J)R + U_{\text{НЭ}} = I_{\text{н}}R - JR + U_{\text{НЭ}}. \quad (11.9)$$

4. Подставим в найденное уравнение выражение для тока $I_{\text{н}}$

$$E = \alpha U_{\text{НЭ}}^2 R - JR + U_{\text{НЭ}}, \quad \text{или} \quad U_{\text{НЭ}}^2 + U_{\text{НЭ}} \frac{1}{\alpha R} - \frac{E + JR}{\alpha R} = 0.$$

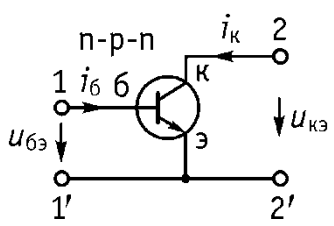
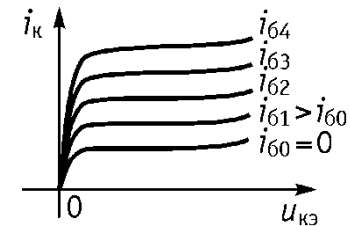
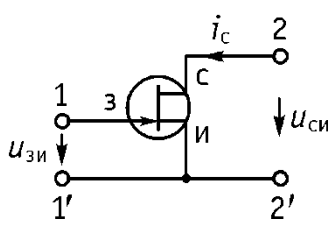
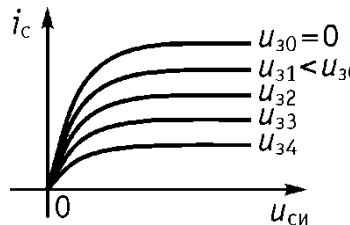
5. Решаем квадратное уравнение и определяем напряжение на НЭ $U_{\text{НЭ}1,2}$.

6. Находим истинное решение: если $U_{\text{НЭ}1} < 0$ и $U_{\text{НЭ}2} > 0$, то истинным является $U_{\text{НЭ}2}$ (т.к. ВАХ НЭ отрицательного напряжения равна нулю).

Электрические цепи с четырехполюсными нелинейными элементами (ЧНЭ)

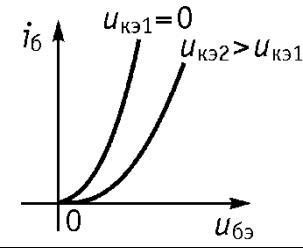
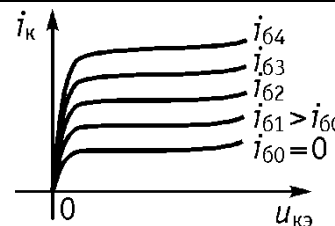
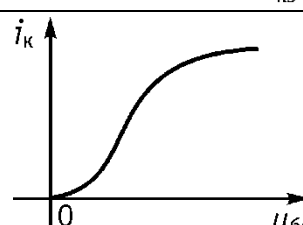
Типы некоторых четырехполюсных нелинейных элементов, их условные обозначения и ВАХ приведены в табл. 11.2.

Табл. 11.2

Тип четырехполюсника	Условное обозначение	ВАХ
1. Биполярные транзисторы		
2. Полевые транзисторы		

Характеристики и параметры четырехполюсных нелинейных элементов на примере биполярных транзисторов (приведены в табл. 11.3).

Табл. 11.3

Тип характеристики	График
1. Входная ВАХ $i_{\text{б}} = F(u_{\text{бэ}}, u_{\text{кэ}})$	
2. Выходная ВАХ $i_{\text{к}} = F(u_{\text{кэ}}, i_{\text{б}})$	
3. Проходная ВАХ $i_{\text{к}} = F(u_{\text{бэ}})$	

Методы анализа электрических цепей с четырехполюсными нелинейными элементами в режиме постоянного тока

Анализ электрических цепей производится, как правило, графо-аналитическим методом, целью анализа является определение (выбор) рабочей точки на входной и выходной ВАХ четырехполюсного НЭ.

Пусть имеется схема с биполярным транзистором (n-p-n переход) (рис. 11.6).



Рис. 11.6

Цель анализа: для заданных значений элементов схемы R_{r1} , R_{r2} , E_1 , E_2 и ВАХ нелинейного элемента найти токи I_{10} , I_{20} и напряжения U_{10} , U_{20} в режиме постоянного тока (решение сводится к определению рабочей точки на входных и выходных ВАХ транзистора).

Порядок анализа

1. Из справочника берутся входные (рис. 11.7 а) и выходные (рис. 11.7 б) ВАХ транзистора (если в справочнике нет ВАХ, то они находятся экспериментальным путем).

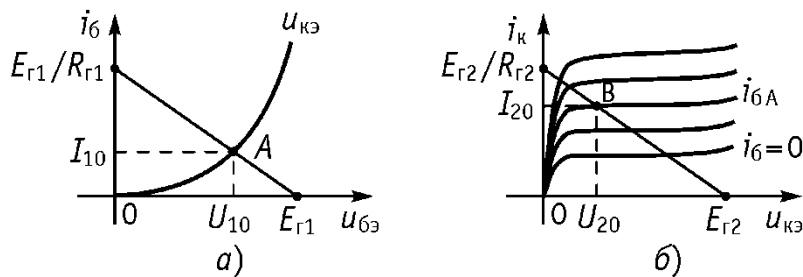


Рис. 11.7

2. Обозначим входной I и выходной II контуры электрической цепи и запишем уравнения ЗНК

$$\begin{aligned} \text{I. } U_{r1} &= I_1 R_{r1} + U_1, \\ \text{II. } U_{r2} &= I_2 R_{r2} + U_2. \end{aligned} \quad (11.10)$$

3. Из полученных уравнений определяем токи I_1 и I_2 (это уравнения прямых линий)

$$I_1 = (U_{r1} - U_1) / R_{r1}; \quad I_2 = (U_{r2} - U_2) / R_{r2}. \quad (11.11)$$

4. Построим соответственно на входных и выходных ВАХ (рисунок 11.7) графики зависимостей токов I_1 и I_2 (прямые линии).

5. На входной ВАХ определяем точку А пересечения ВАХ и графика уравнения тока I_1 и определяем ток I_{10} и напряжение U_{10} . Зная ток базы $I_{10} = i_{6A}$, находим точку В пересечения графика уравнения тока I_2 с ВАХ, соответствующую току базы I_{10} ($I_{10} = i_{6A}$).

Дальнейший анализ электрической цепи может быть связан с нахождением токов в ветвях и напряжений на элементах цепи.

Если на вход цепи будет подан сигнал, то анализ прохождения сигнала через цепь с четырехполюсным НЭ может быть проведен, если известна математическая функция проходной ВАХ ЧНЭ. Определение этой математической функции по заданному графику ВАХ относится к задаче аппроксимации (т.е. поиску такой математической функции, которая достаточно точно описывала бы ВАХ ЧНЭ).

Лекция 20

Аналитическое представление ВАХ нелинейных элементов. Решение задачи аппроксимации

Постановка задачи аппроксимации: задана ВАХ в виде табл. 11.4, необходимо найти аналитическую функцию с достаточной точностью аппроксимирующую ВАХ нелинейного элемента.

Табл. 11.4

$U, \text{ В}$	0,4	0,5	0,7	0,8	0,9
$I, \text{ мА}$	0,04	0,05	0,15	0,25	0,5

Общий порядок решения задачи аппроксимации

Замечание. Заданная ВАХ – аппроксимируемая функция $\xi(u)$ или $\xi(x)$, а функция, которая будет описывать ВАХ называется аппроксимирующей функцией $f(u)$.

1. Выбираем вид аппроксимирующей функции $f(u)$. В качестве аппроксимирующей функции $f(u)$ в технике используются:

а) алгебраические полиномы (степенные ряды) вида

$$f(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + \dots + a_nu^n = \sum_{k=0}^n a_k u^k; \quad (11.12)$$

б) кусочно-линейные функции – степенные ряды 1-ой степени вида (рис. 11.8 а)

$$f_j(u) = a_{0j} + a_{1j}u; \quad (11.13)$$

в) кусочно-квадратичные функции – квадратичные (параболические) сплайны (рис. 11.8 б)

$$f_j(u) = a_{0j} + a_{1j}u + a_{2j}u^2; \quad (11.14)$$

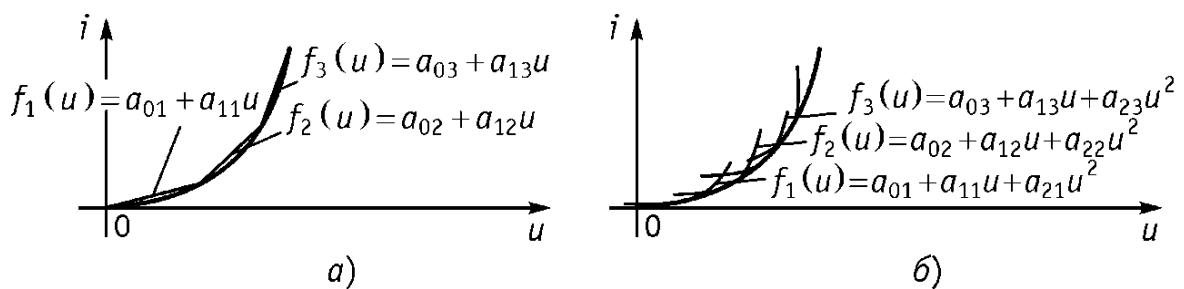


Рис. 11.8

г) кусочно-кубические функции – кубические сплайны

$$f_j(u) = a_{0j} + a_{1j}u + a_{2j}u^2 + a_{3j}u^3; \quad (11.15)$$

д) ряд Тейлора

$$f(u) = f(U_0) + \frac{f'(U_0)}{1!}(u - U_0) + \frac{f''(U_0)}{2!}(u - U_0)^2 + \dots \quad (11.16)$$

При $U_0 = 0$ ряд Тейлора имеет вид (ряд Маклорена)

$$f(u) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}u + \frac{f''(0)}{2!}u^2 + \dots; \quad (11.17)$$

е) *трансцендентные функции*, например, для тока р-п перехода

$$f(u) = i = I_0 (e^{u/\varphi_T} - 1), \quad (11.18)$$

где φ_T – тепловой потенциал равный 0,026 В при $T = 300\text{K}$; u – напряжение.

2. Выбираем критерий приближения аппроксимирующей функции $f(u)$ к аппроксимируемой функции $\xi(u)$.

Наибольшее распространение получили следующие критерии приближения:

а) *критерий Чебышева* – критерий наилучшего равномерного приближения

$$\lambda = \min_{(a_0, \dots, a_n)} \max |f(u) - \xi(u)|. \quad (11.19)$$

Критерий Чебышева базируется на следующей теореме Чебышева: если рациональная функция $f(x, a_1, a_2, \dots, a_n)$ с N коэффициентами аппроксимирует вещественную функцию $\xi(x)$ на заданном отрезке $[c, d]$ по Чебышеву, то все максимумы отклонения равны между собой и достигаются не менее, чем $N + 1$ раз, причем знаки отклонений чередуются.

На рис. 11.9 а представлены графики функции $\xi(u)$ и $f(u)$. Функция $f(u)$ – полином 1-ой степени ($N = 1$). Знаки отклонений чередуются: «-», «+», «-»;

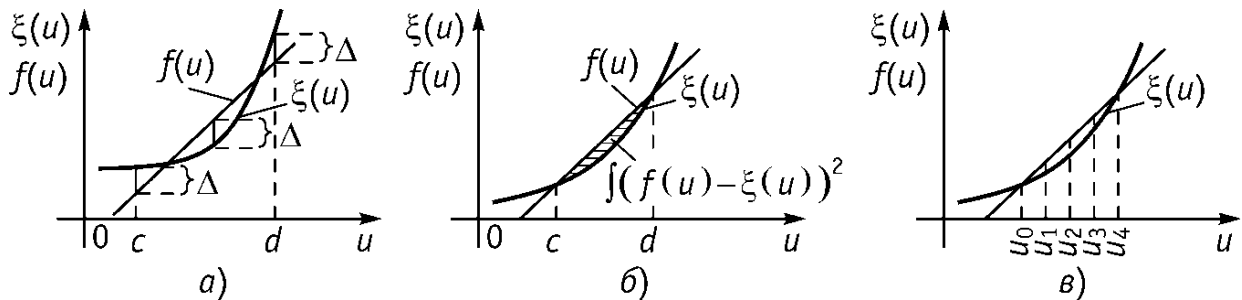


Рис. 11.9

б) *среднеквадратический критерий* (среднеквадратическое приближение).

Для непрерывной функции заданной на отрезке $[c; d]$ (рис. 11.9 б)

$$\lambda = \min_{(a_1 \dots a_N)} \frac{1}{d-c} \int_c^d (f(u) - \xi(u))^2 du. \quad (11.20)$$

Для функции, заданной в точках отсчета (рис. 11.9 в)

$$\lambda = \min_{(\alpha_1 \dots \alpha_N)} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (f(u_k) - \xi(u_k))^2 \quad (11.21)$$

функция $f(u)$ будет наилучшим образом приближаться к функции $\xi(u)$ при таких коэффициентах $a_1, \dots, a_N$, при которых сумма квадратов отклонений $f(u)$ от $\xi(u)$ в точках $u_1, \dots, u_k$ ($k > N$) будет минимальной;

в) *критерий приближения* (интерполяция) – совпадение значений функций $f(u)$ и $\xi(u)$ в заданных (выбранных) точках u_i (в узлах интерполяции), где

$i = 1, \dots, N$ – количество неизвестных коэффициентов (количество узлов интерполяции). Аппроксимация называется интерполяцией

$$f(u_i) = \xi(u_i). \quad (11.22)$$

Недостаток: отсутствует процедура выбора узлов интерполяции;

г) *приближение по Тейлору* – значение аппроксимирующей функции $f(u)$ и аппроксимируемой функции $\xi(u)$ и их $N - 1$ значений производных совпадают в выбранной точке U_0

$$\begin{aligned} f(U_0, a_1, \dots, a_N) &= \xi(U_0), \\ f'(U_0, a_1, \dots, a_N) &= \xi'(U_0), \\ &\dots \\ f^{N-1}(U_0, a_1, \dots, a_N) &= \xi^{N-1}(U_0), \end{aligned} \quad (11.23)$$

где N – количество неизвестных коэффициентов.

3. Составляем систему уравнений, из которой определяем коэффициенты.

4. Записываем аппроксимирующую функцию $f(u)$.

В соответствии с общим порядком решения задачи аппроксимации находим аппроксимирующую функцию для различных критериев приближения.

Аппроксимация по среднеквадратическому критерию приближения

$$\lambda = \min_{(a_0, \dots, a_N)} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (f(u_k) - \xi(u_k))^2. \quad (11.24)$$

1. Выбираем аппроксимирующую функцию $f(u)$ в виде степенного ряда (полином 2-ой степени, $s = 2$)

$$f(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2. \quad (11.25)$$

2. Аппроксимируем ВАХ степенным рядом относительно точки U_0 ($U_0 = 0,7$ табл. 13)

$$f(u) = a_0 + a_1(u - 0,7) + a_2(u - 0,7)^2 = a_0 + a_1 u_{\text{н}} + a_2 u_{\text{н}}^2. \quad (11.26)$$

3. Определяем значения $u_{\text{н}}$ в точках $0,4, \dots, 0,9$; $M = 5$

$$\begin{aligned} k = 1: u_{\text{н}1} &= (0,4 - 0,7) = -0,3; u_{\text{н}1}^2 = 0,09; \\ k = 2: u_{\text{н}2} &= (0,5 - 0,7) = -0,2; u_{\text{н}2}^2 = 0,04; \\ k = 3: u_{\text{н}3} &= (0,7 - 0,7) = 0; u_{\text{н}3}^2 = 0; \\ k = 4: u_{\text{н}4} &= (0,8 - 0,7) = 0,1; u_{\text{н}4}^2 = 0,01; \\ k = 5: u_{\text{н}5} &= (0,9 - 0,7) = 0,2; u_{\text{н}5}^2 = 0,04. \end{aligned} \quad (11.27)$$

4. Получим систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов a_0, a_1 и a_2 , взяв производные от функции $\lambda = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (f(u_k) - \xi(u_k))^2$ по этим коэффициентам и приравняв их нулю (минимумы функции λ)

$$\frac{\partial \lambda}{\partial a_i} = \frac{\partial}{\partial a_i} \left(\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (f(u_k) - \xi(u_k))^2 \right) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M 2(f(u_k) - \xi(u_k)) \frac{\partial f(u_k)}{\partial a_i} = 0. \quad (11.28)$$

Подставим вместо $f(u_k)$ ее выражение через степенной ряд, получим следующее соотношение

$$\frac{\partial \lambda}{\partial a_i} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \left(\sum_{s=0}^S a_s u_k^s - \xi(u_k) \right) \cdot u_k^i = 0, \quad (11.29)$$

где $i = 0, 1, 2$; $s = 0, 1, 2$; $M = 5$ – количество точек, в которых определены отклонения функции $f(u_k)$ от функции $\xi(u_k)$.

Из последнего выражения получим

$$\sum_{s=0}^S a_s \sum_{k=1}^M u_k^{s+i} = \sum_{k=1}^M \xi(u_k) u_k^i. \quad (11.30)$$

5. Из полученного соотношения сформируем систему из трех уравнений для определения трех неизвестных коэффициентов a_0, a_1, a_2 .

Для $i = 0, \left(\frac{\partial \lambda}{\partial a_0} = 0 \right), M = 5$

$$\begin{array}{ccc} s = 0 & s = 1 & s = 2 \\ a_0(u_1^0 + u_2^0 + u_3^0 + u_4^0 + u_5^0) + a_1(u_1^{0+1} + u_2^1 + u_3^1 + u_4^1 + u_5^1) + a_2(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2) = \\ = \xi(u_1)u_1^0 + \xi(u_2)u_2^0 + \xi(u_3)u_3^0 + \xi(u_4)u_4^0 + \xi(u_5)u_5^0. \end{array} \quad (11.31)$$

Для $i = 1, \left(\frac{\partial \lambda}{\partial a_1} = 0 \right), M = 5$

$$\begin{array}{ccc} s = 0 & s = 1 & s = 2 \\ a_0(u_1^1 + u_2^1 + u_3^1 + u_4^1 + u_5^1) + a_1(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2) + a_2(u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 + u_4^3 + u_5^3) = \\ = \xi(u_1)u_1^1 + \xi(u_2)u_2^1 + \xi(u_3)u_3^1 + \xi(u_4)u_4^1 + \xi(u_5)u_5^1. \end{array} \quad (11.32)$$

Для $i = 2, \left(\frac{\partial \lambda}{\partial a_2} = 0 \right), M = 5$

$$\begin{array}{ccc} s = 0 & s = 1 & s = 2 \\ a_0(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2) + a_1(u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 + u_4^3 + u_5^3) + a_2(u_1^4 + u_2^4 + u_3^4 + u_4^4 + u_5^4) = \\ = \xi(u_1)u_1^2 + \xi(u_2)u_2^2 + \xi(u_3)u_3^2 + \xi(u_4)u_4^2 + \xi(u_5)u_5^2. \end{array} \quad (11.33)$$

6. Подставим в полученную систему из трех уравнений вместо напряжений $u_{н1}, u_{н2}, u_{н3}, u_{н4}, u_{н5}$ их значения, а вместо значений $\xi(u_i)$ подставим значения токов из таблицы, соответствующие напряжениям 0,04; 0,05; 0,15; 0,25; 0,5, тогда

$$\begin{cases} 5a_0 - 0,2a_1 + 0,18a_2 = 0,99, \\ -0,2a_0 + 0,18a_1 + 0,026a_2 = 0,103, \\ 0,18a_0 - 0,026a_1 + 0,0123a_2 = -0,241. \end{cases} \quad (11.34)$$

7. Решим систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_0, a_1, a_2

$$a_0 = 0,164 \text{ [мА]}; \quad a_1 = 1,07 \text{ [мА/В]}; \quad a_2 = 2,069 \text{ [мА/В}^2\text{]}. \quad (11.35)$$

8. Зная коэффициенты, запишем вид аппроксимирующей функции $f(u)$

$$f(u) = 0,164 + 1,07(u - 0,7) + 2,069(u - 0,7)^2. \quad (11.36)$$

Аппроксимация по критерию совпадения значений функций $f(u_k)$ и $\xi(u_k)$ в узлах интерполяции

1. Выбираем узлы интерполяции. Поскольку функция $f(u)$ имеет три неизвестных коэффициента a_0, a_1, a_2 , то выбираем три узла интерполяции и определяем значения напряжения в узлах

$$u_1 = 0,5; \quad u_2 = 0,7; \quad u_3 = 0,9. \quad (11.37)$$

2. Определяем значения напряжений $u_{н1}, u_{н2}, u_{н3}$ в узлах относительно 2-го узла ($u_2 = 0,7$)

$$\begin{aligned} u_{н1} &= 0,5 - 0,7 = -0,2; \\ u_{н2} &= 0,7 - 0,7 = 0; \\ u_{н3} &= 0,9 - 0,7 = 0,2. \end{aligned} \quad (11.38)$$

3. Записываем систему уравнений вида

$$\sum_{s=0}^S a_s u_k^s = \xi(u_k), \quad k=1, 2, 3; \quad s=0, 1, 2 \quad (S=2) \quad (11.39)$$

$$\left. \begin{aligned} k=1: & \quad a_0 - 0,2a_1 + 0,04a_2 = 0,05, \\ k=2: & \quad a_0 + 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 = 0,15, \\ k=3: & \quad a_0 + 0,2a_1 + 0,04a_2 = 0,5. \end{aligned} \right\} \quad (11.40)$$

4. Решим полученную систему относительно коэффициентов a_0, a_1, a_2

$$a_0 = 0,15 \text{ [мА]}; \quad a_1 = 1,125 \text{ [мА/В]}; \quad a_2 = 3,125 \text{ [мА/В}^2\text{]}. \quad (11.41)$$

5. Запишем аппроксимирующую функцию

$$f(u) = 0,15 + 1,125(u - 0,7) + 3,125(u - 0,7)^2. \quad (11.42)$$

Приближение по Тейлору

1. Записываем функцию $f(u)$ в виде ряда Тейлора относительно напряжения U_0

$$f(u) = f(U_0) + \frac{f'(u)|_{u=U_0}}{1!}(u - U_0) + \frac{f''(u)|_{u=U_0}}{2!}(u - U_0)^2. \quad (11.43)$$

Количество производных на единицу меньше количества неизвестных коэффициентов функции $f(u)$.

2. Определяем приближенно по функции $\xi(u)$ производные и значения функции $f(u)$ в точке U_0

$$f(U_0) = a_0 = I_0 = 0,15 \text{ [мА]}; f'(u)|_{u=U_0} = \frac{1}{R_{\text{диф}}} = S = \frac{\Delta i}{\Delta u}|_{U_0=0,7} = 1,06 \text{ [мА/В]}. \quad (11.44)$$

Так как возникает трудность в определении второй производной по таблице, то для вычисления a_2 применяем следующую (эмпирическую) формулу (величины $U_{\max}$, I_0 , $I_{\min}$ пояснены на рис. 11.10)

$$a_2 = \frac{I_{\max} - 2I_0 + I_{\min}}{2U_{\max}^2}; \quad a_2 = \frac{0,5 - 0,3 + 0,05}{2(0,2)^2} \approx \frac{0,25}{0,08} \approx 3,1 \text{ [мА/В}^2\text{]}. \quad (11.45)$$

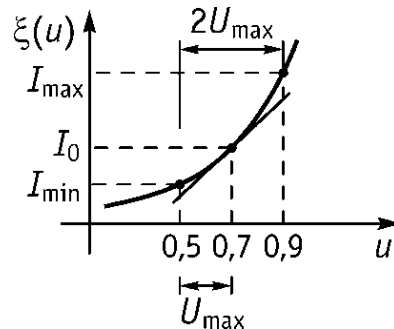


Рис. 11.10

3. Запишем аппроксимирующую функцию

$$f(u) = 0,15 + 1,06(u - 0,7) + 3,1(u - 0,7)^2. \quad (11.46)$$

Замечание. Наибольшее распространение из всех критериев приближения получил среднеквадратический критерий приближения.

ТЕМА 12. Нелинейные электрические цепи при гармоническом воздействии

Лекция 21

Воздействие гармонических колебаний на нелинейный резистивный элемент (НРЭ)

При анализе нелинейных электрических цепей, следует иметь в виду, что:

- 1) нет общих методов анализа нелинейных электрических цепей;
- 2) все методы анализа приближенные;
- 3) применимы законы Кирхгофа (ЗТК и ЗНК);
- 4) не применим закон Ома;
- 5) не применимы принципы взаимности (обратимости) и суперпозиции.

Постановка задачи анализа: имеется нелинейный резистивный элемент (НЭ), ВАХ которого задана в виде табл. 12.1.

Табл. 12.1

U , В	0,4	0,5	0,7	0,8	0,9
I , мА	0,04	0,05	0,15	0,25	0,5

На вход нелинейного элемента подается напряжение в виде суммы гармонического напряжения с максимальной амплитудой U_m и постоянного напряжения, равного U_0 : $u(t) = U_0 + U_m \cos \omega t$.

Необходимо найти спектр тока на выходе НЭ.

Порядок анализа

А. Степенная аппроксимация ВАХ (гармоническое колебание не выходит за пределы ВАХ: $U_0 = 0,7$ В; $U_m = 0,2$ В).

1. Строим график ВАХ НЭ и напряжение $u(t)$ на входе НЭ (рис. 12.1).

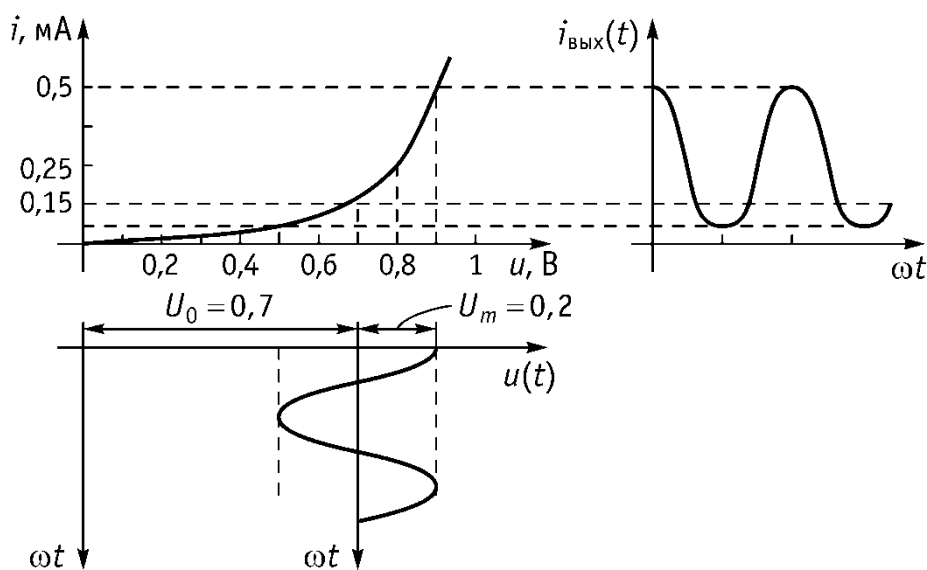


Рис. 12.1

2. Поскольку входное напряжение не выходит за пределы ВАХ, то аппроксимирующую функцию $i(t)$ находим в виде степенного ряда

$$i(t) = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2 + a_3(u - U_0)^3 + \dots \quad (12.1)$$

3. Подставим в степенной ряд выражение для входного напряжения

$$i(t) = a_0 + a_1(U_0 + U_m \cos \omega t - U_0) + a_2(U_0 + U_m \cos \omega t - U_0)^2 + \\ + a_3(U_0 + U_m \cos \omega t - U_0)^3 + \dots = a_0 + a_1 U_m \cos \omega t + a_2 U_m^2 \cos^2 \omega t + \\ + a_3 U_m^3 \cos^3 \omega t + \dots \quad (12.2)$$

4. В последнем выражении заменим $\cos^2 \omega t$, $\cos^3 \omega t$, ... на сумму косинусов кратных углов

$$\cos^2 \omega t = \frac{1}{2}(\cos 2\omega t + 1); \quad \cos^3 \omega t = \frac{1}{4}(\cos 3\omega t + 3\cos \omega t) \quad (12.3)$$

$$\cos^4 \omega t = (\cos 4\omega t + 4\cos 2\omega t + 3)/8 \text{ и т.д., тогда получим} \quad (12.4)$$

$$i(t) = a_0 + \frac{1}{2}a_2 U_m^2 + \dots + \left(a_1 U_m + \frac{3}{4}a_3 U_m^3 + \dots \right) \cos \omega t + \\ + \left(\frac{1}{2}a_2 U_m^2 + \dots \right) \cos 2\omega t + \left(\frac{1}{4}a_3 U_m^3 + \dots \right) \cos 3\omega t + \dots = \\ = I_0 + I_{m1} \cos \omega t + I_{m2} \cos 2\omega t + I_{m3} \cos 3\omega t + \dots, \quad (12.5)$$

где I_0 , I_{m1} , I_{m2} , I_{m3} , ... — соответственно постоянная составляющая и амплитуды 1-ой, 2-ой, 3-ей и т.д. гармоник тока на выходе НЭ.

Анализ полученного выражения показывает:

1) амплитуды гармонических составляющих зависят нелинейно от амплитуды приложенного напряжения;

2) количество гармонических составляющих равно степени полинома;

3) амплитуды четных (нечетных) гармоник, определяются только коэффициентами при четных (нечетных) степенях слагаемых полинома (и зависят нелинейно от U_m).

Б. Аппроксимация ВАХ кусочно-линейными функциями (гармоническое колебание выходит за пределы ВАХ при $u(t) \leq 0$: $U_0 = -0,2$ В; $U_m = 1,1$ В).

1. Строим график ВАХ НЭ и подаем напряжение $u(t)$ на вход НЭ (рис. 12.2).

2. Поскольку входное напряжение выходит за пределы ВАХ (при $u < 0$), тогда ВАХ НЭ аппроксимируем кусочно-линейными функциями вида

$$i(t) = a_{0i} + a_{1i}u. \quad (12.6)$$

Ограничимся двумя кусочно-линейными функциями, поиск которых проведем, используя критерий приближения Тейлора:

а) на линейном участке ВАХ выбираем точку A , например, при $u = 0,85$ и обозначаем U_A ;

б) записываем ряд Тейлора первого порядка в окрестности точки U_A

$$i(t) = f(U_A) + \frac{f'(u)|_{u=U_A}}{1!}(u - U_A) = a_0 - a_1(u - U_A); \quad (12.7)$$

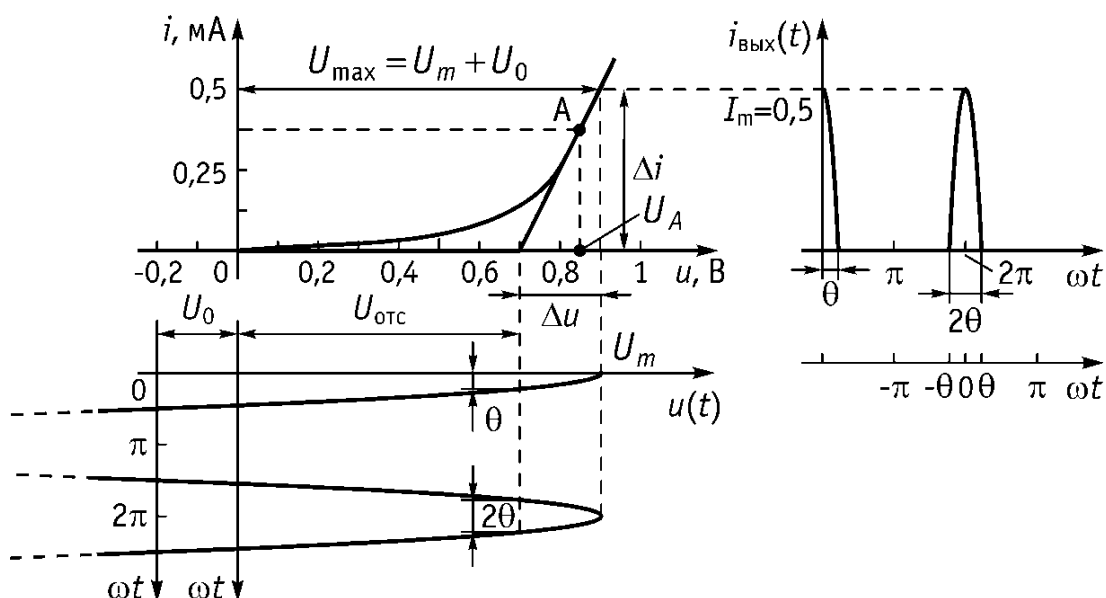


Рис. 12.2

в) из графика ВАХ для $u = U_A$ определяем $f(U_A) = I_A = 0,375$;

г) в точке A ВАХ строим касательную и графически определяем первую производную $f'(u)|_{u=U_A}$

$$f'(u)|_{u=U_A} = \frac{0,5 - 0,25}{0,9 - 0,7} = \frac{0,5}{0,2} = 2,5; \quad (12.8)$$

таким образом, $a_1 = f'(u)|_{u=U_A} = S = 2,5$;

д) записываем уравнение линии, которая аппроксимирует линейный участок ВАХ

$$i(t) = a_0 + a_1(u - U_A) = I_A + S(u - U_A); \quad (12.9)$$

е) найдем напряжение, при котором ток $i(t)$ равен нулю (найдем напряжение отсечки $U_{отс}$) из уравнения $i(t) = 0 = I_A + S(u - U_A)$

$$u = U_{отс} = U_A - I_A/S; \quad U_{отс} = 0,85 - 0,375/2,5 = 0,7. \quad (12.10)$$

Замечание. Напряжение $U_{отс}$ можно найти как напряжение, отсчитываемое от начала координат до точки пересечения касательной с осью абсцисс;

ж) запишем уравнение аппроксимирующей функции, имеющей напряжение отсечки $U_{отс}$

$$i(t) = I_A + S(u - U_A) = S\left(u - \frac{SU_A - I_A}{S}\right) = S(u - U_{отс}), \quad (12.11)$$

(для приведенного примера $i(t) = 2,5(u - 0,7)$).

Таким образом, ВАХ НЭ при $U_{отс} < u \leq U_{max}$ аппроксимируем прямой $i(t) = S(u - U_{отс})$;

з) аппроксимируем ВАХ НЭ при $0 \leq u < U_{отс}$ прямой линией $i(t) = 0$;

и) построим аппроксимирующие функции на графике ВАХ НЭ и построим график выходного тока НЭ с обозначением углов отсечки θ . Из графика тока видно, что $i(t) \neq 0$ при $0 \leq \omega t < \theta$, $2\pi - \theta < \omega t < 2\pi + \theta$

$$i(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq u < U_{отс}, \\ S(u - U_{отс}), & \text{при } U_{отс} \leq u \leq U_{max}. \end{cases} \quad (12.12)$$

3. Определяем угол отсечки θ :

а) подставим в уравнение $i(t)$ вместо $u(t)$ его выражение $u(t) = U_0 + U_m \cos \omega t$

$$i(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq u < U_{\text{отс}}, \\ S(U_0 + U_m \cos \omega t - U_{\text{отс}}), & U_{\text{отс}} \leq u \leq U_{\text{max}}; \end{cases} \quad (12.13)$$

б) поскольку при $u = U_{\text{отс}}$ ток равен нулю и $\omega t = \theta$, то

$$S(U_0 + U_m \cos \theta - U_{\text{отс}}) = 0, \quad (12.14)$$

откуда

$$\cos \theta = \frac{U_{\text{отс}} - U_0}{U_m}; \quad \theta = \arccos \left(\frac{U_{\text{отс}} - U_0}{U_m} \right). \quad (12.15)$$

4. Определяем ток на интервале $-\pi \leq \omega t \leq \pi$ (рис. 12.2), включая и подинтервалы, входящие в этот интервал

$$i(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } -\pi \leq \omega t < -\theta; \quad \theta < \omega t \leq \pi, \\ SU_m (\cos \omega t - \cos \theta), & \text{при } -\theta \leq \omega t \leq \theta \end{cases} \quad (12.16)$$

или

$$i(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } -\pi \leq \omega t < -\theta; \quad \theta < \omega t \leq \pi, \\ I_{\text{max}} \frac{\cos \omega t - \cos \theta}{1 - \cos \theta}, & \text{при } -\theta \leq \omega t \leq \theta, \end{cases} \quad (12.17)$$

где $SU_m (1 - \cos \theta) = I_{\text{max}}$, $SU_m = I_{\text{max}} / (1 - \cos \theta)$.

5. Определяем спектр тока. Для этого разложим выходной ток $i(t)$ в ряд Фурье (выходной ток является периодической функцией времени). Коэффициенты ряда Фурье (составляющие спектра тока) равны

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta}^{\theta} SU_m (\cos \omega t - \cos \theta) d(\omega t) = SU_m \frac{1}{\pi} (\sin \theta - \theta \cos \theta) = S \cdot U_m \gamma_0(\theta) = \\ &= I_{\text{max}} \alpha_0(\theta), \end{aligned} \quad (12.18)$$

$$\begin{aligned} I_{m1} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} SU_m (\cos \omega t - \cos \theta) \cos \omega t d(\omega t) = SU_m \frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{\pi} = SU_m \gamma_1(\theta) = \\ &= I_{\text{max}} \alpha_1(\theta). \end{aligned}$$

Для $k \geq 2$

$$I_{m,k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} SU_m (\cos \omega t - \cos \theta) \cos k \omega t d(\omega t) = SU_m \gamma_k(\theta) = I_{\text{max}} \alpha_k(\theta), \quad (12.19)$$

где

$$\gamma_k(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} (\cos \omega t - \cos \theta) \cos k \omega t d(\omega t) = \frac{2 \sin(k\theta) \cos \theta - k \cos(k\theta) \sin \theta}{k(k^2 - 1)}. \quad (12.20)$$

$\gamma_0(\theta), \dots, \gamma_k(\theta)$ – функции Берга.

Функции Берга табулированы и имеются в справочной литературе.

6. Запишем окончательно составляющие спектра тока на выходе НЭ

$$\begin{aligned} I_0 &= SU_m \gamma_0(\theta) = I_{\max} \alpha_0(\theta), \\ I_{m1} &= SU_m \gamma_1(\theta) = I_{\max} \alpha_1(\theta), \\ I_{m2} &= SU_m \gamma_2(\theta) = I_{\max} \alpha_2(\theta) \text{ и т.д.} \end{aligned} \quad (12.21)$$

Воздействие суммы гармонических колебаний на нелинейный резистивный элемент

Постановка задачи анализа: имеется нелинейный резистивный элемент, ВАХ которого представлена полиномом n -й степени

$$i = a_0 + a_1(u - U_0) + \dots + a_n(u - U_0)^n. \quad (12.22)$$

На вход нелинейного резистивного элемента подается сумма гармонических колебаний вида

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \cos(\omega_k t + \varphi_k). \quad (12.23)$$

Необходимо определить ток на выходе НЭ.

Порядок анализа

А. Для суммы двух гармонических колебаний вида

$$u(t) = U_0 + U_{m1} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + U_{m2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (12.24)$$

1. Подставляем в уравнение ВАХ напряжение $u(t)$, имеем

$$\begin{aligned} i(t) &= a_0 + a_1 [U_0 + U_{m1} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + U_{m2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) - U_0] + \\ &+ a_2 [U_0 + U_{m1} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + U_{m2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) - U_0]^2 + \dots + \\ &+ a_n [U_0 + U_{m1} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + U_{m2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) - U_0]^n. \end{aligned} \quad (12.25)$$

2. Возведем в квадрат, куб и т.д., в n -ю степень, заменим $\cos^2(\omega t)$, $\cos^3(\omega t)$ и т.д. на сумму косинусов кратных углов, приведем подобные члены

$$i(t) = a_0 + \frac{1}{2} a_2 U_{m1}^2 + \frac{1}{2} a_2 U_{m2}^2 + \dots + \left(a_1 U_{m1} + \frac{3}{4} a_3 U_{m1}^3 + \dots \right) \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \dots \quad (12.26)$$

Ток $i(t)$ содержит гармонические колебания (составляющие) с частотами вида

$$|l\omega_1 \pm m\omega_2|, \quad l = 0, 1, \dots, n; \quad m = 0, 1, \dots, n; \quad l + m \leq n. \quad (12.27)$$

Сумма $(l+m)$ определяет порядок комбинационных колебаний. Например, комбинационные колебания 4-го порядка – это колебания с частотами $4\omega_1$, $|3\omega_1 \pm \omega_2|$, $|2\omega_1 \pm 2\omega_2|$, $|\omega_1 \pm 3\omega_2|$ и $4\omega_2$.

Б. Для бесконечной суммы гармонических колебаний спектр содержит составляющие с частотами

$$l\omega_1 \pm m\omega_2 \pm p\omega_3 \pm k\omega_4 \pm \dots, \quad (12.28)$$

где $l + m + p + k \leq n$.

Например, если $n = 2$, тогда имеем комбинационные частоты

$2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3, \dots, \omega_1 \pm \omega_2, \omega_1 \pm \omega_3, \omega_1 \pm \omega_4, \dots, \omega_2 \pm \omega_3, \omega_2 \pm \omega_4, \dots, \omega_3 \pm \omega_4$ и т.д.

Лекция 22

Преобразование частоты гармонического колебания

При передаче электрического сигнала часто требуется переносить спектр сигнала вверх или вниз по шкале частот.

Перенос спектра сигнала по шкале частот называется *преобразованием частоты*.

Постановка задачи анализа: имеется спектр сигнала в области нижних частот (например, речевой сигнал) (рис. 12.3 а). Необходимо перенести этот спектр сигнала в область верхних частот (в область частоты ω_0 работы канала) (рис. 12.3 б).

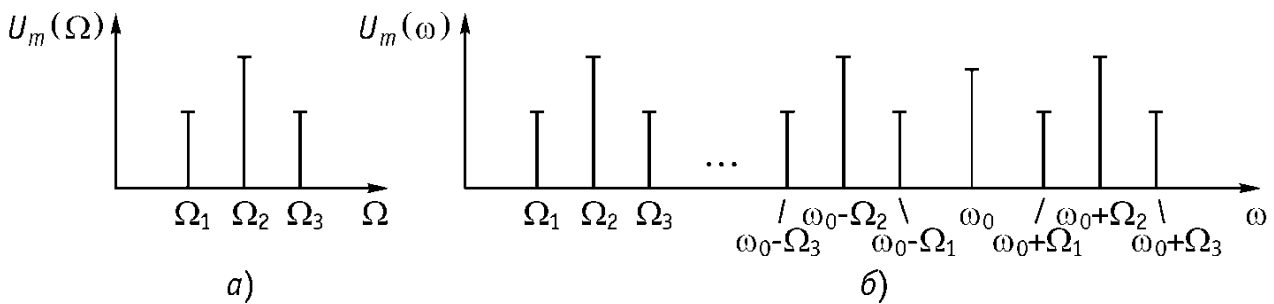


Рис. 12.3

Порядок анализа

1. В качестве преобразователя частоты выбираем (как один из вариантов) усиительный каскад на транзисторе с колебательным контуром, настроенным на частоту ω_0 и имеющим необходимую полосу пропускания для спектра речевого сигнала (рис. 12.4).

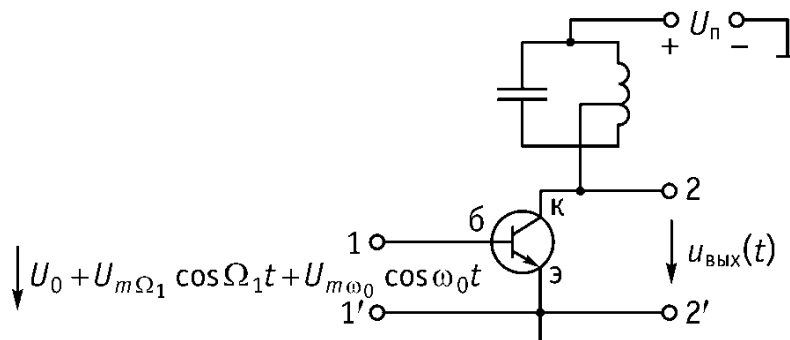


Рис. 12.4

Пусть низкочастотный сигнал для простоты анализа содержит только одну составляющую на частоте Ω_1 , тогда входной сигнал, равный сумме низкочастотного и высокочастотного сигналов имеет вид

$$u_{\text{вх}}(t) = U_0 + U_{m\Omega_1} \cos \Omega_1 t + U_{m\omega_0} \cos \omega_0 t. \quad (12.29)$$

2. Положим, что нам известен тип биполярного транзистора.

а) Из справочника берем входные (рис. 12.5 а) и выходные (рис. 12.5 б) ВАХ.

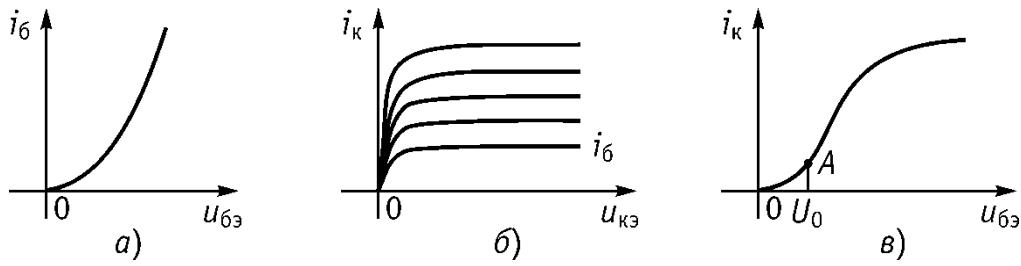


Рис. 12.5

б) Зная входные и выходные ВАХ, находим проходную характеристику (рис. 12.5 в).

3. Выбираем на нелинейной части проходной характеристике рабочую точку А, соответствующую напряжению U_0 (U_0 не должно соответствовать линейному участку). Аппроксимируем проходную ВАХ относительно U_0 , например, полином 2-й степени

$$i_k(t) = a_0 + a_1(u_{63} - U_0) + a_2(u_{63} - U_0)^2. \quad (12.30)$$

4. Подставляем в аппроксимирующую функцию проходной ВАХ выражение для напряжения $u_{63}(t)$

$$u_{63}(t) = U_0 + U_{m\Omega_1} \cos \Omega_1 t + U_{m\omega_0} \cos \omega_0 t, \quad (12.31)$$

производим преобразование

$$\begin{aligned} i_k(t) = & a_0 + a_1 U_{m\Omega_1} \cos \Omega_1 t + a_1 U_{m\omega_0} \cos \omega_0 t + \frac{a_2 U_{m\Omega_1}^2}{2} + \\ & + \frac{a_2 U_{m\omega_0}^2}{2} + \frac{a_2 U_{m\Omega_1}^2}{2} \cos 2\Omega_1 t + \frac{a_2 U_{m\omega_0}^2}{2} \cos 2\omega_0 t + \\ & + a_2 U_{m\Omega_1} U_{m\omega_0} \cos(\omega_0 + \Omega_1)t + a_2 U_{m\Omega_1} U_{m\omega_0} \cos(\omega_0 - \Omega_1)t \end{aligned} \quad (12.32)$$

и получаем спектр выходного сигнала, который представлен на рис. 12.6.

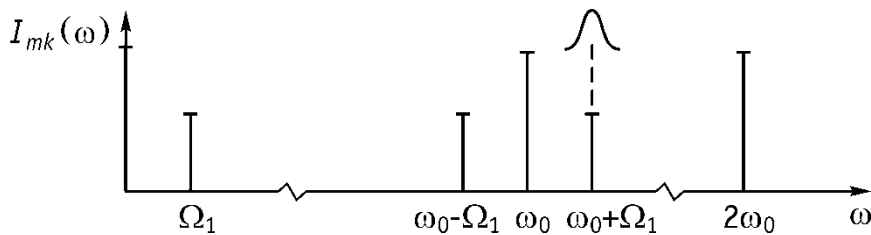


Рис. 12.6

5. Пусть колебательный контур настроен на частоту $\omega_p = \omega_0 + \Omega_1$, тогда на выходе усилителя из всего представленного спектра будет выделена только составляющая с частотой $\omega_0 + \Omega_1$

$$i_k(t) = a_2 U_{m\Omega_1} U_{m\omega_0} \cos(\omega_0 + \Omega_1)t. \quad (12.33)$$

6. Зная ток, определяем выходное напряжение

$$u_{\text{вых}}(t) = i_k(t) \cdot R_{03} = R_{03} a_2 U_{m\Omega_1} U_{m\omega_0} \cos(\omega_0 + \Omega_1)t. \quad (12.34)$$

Резонансный усилитель большого сигнала

Постановка задачи анализа: имеется сигнал с большой амплитудой вида

$$u(t) = U_m \cos \omega_1 t. \quad (12.35)$$

Необходимо усилить большой сигнал.

Порядок анализа

1. Выбираем схему усилителя, как и при малом сигнале (рис. 12.4).
2. Из справочника на биполярные транзисторы берем входные и выходные характеристики.
3. Зная входные и выходные ВАХ, строим проходную характеристику (рис. 12.7).
4. Аппроксимируем проходную ВАХ кусочно-линейной функцией:
 - а) выбираем на линейном участке ВАХ рабочую точку и проводим касательную до пересечения с осью $u_{бэ}$, определяем напряжение отсечки $U_{отс}$;
 - б) при $0 \leq u_{бэ} < U_{отс}$ проходную ВАХ аппроксимируем прямой $i = 0$. Фиксируем максимальное напряжение $u_{бэ} = U_{max}$.
5. а) если U_0 задано, тогда на оси $u_{бэ}$ откладываем напряжение смещения U_0 и относительно U_0 подаем большой сигнал (рис. 12.7);

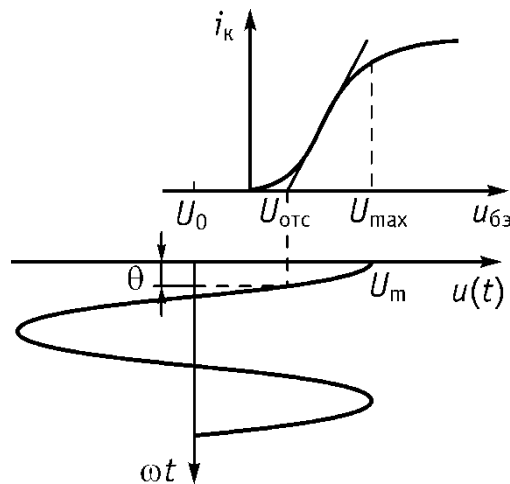


Рис. 12.7

- б) если U_0 не задано, тогда находим U_0 : $U_0 = U_{max} - U_m$.
6. Зная U_0 , U_m и $U_{отс}$, определяем угол отсечки

$$\theta = \arccos \left(\frac{U_{отс} - U_0}{U_m} \right). \quad (12.36)$$

7. Определяем крутизну линейного участка проходной ВАХ

$$S = \frac{\Delta i_k}{\Delta u_{бэ}}. \quad (12.37)$$

8. Определяем постоянный ток на выходе усилителя

$$I_0 = S U_m \gamma_0(\theta). \quad (12.38)$$

9. Определяем первую гармонику тока на выходе усилителя

$$I_{m1} = S U_m \gamma_1(\theta). \quad (12.39)$$

10. Определяем амплитуду 1-й гармоники выходного напряжения

$$U_{m1} = I_{m1} \cdot R_{0э} = R_{0э} S U_m \gamma_1(\theta). \quad (12.40)$$

11. Определяем активную мощность на выходе усилителя

$$P_a = \frac{1}{2} I_{m1} U_{m1}. \quad (12.41)$$

12. Определяем потребляемую мощность усилителя

$$P_{\text{пот}} = I_0 U_{\text{пит}}. \quad (12.42)$$

13. Определяем КПД

$$\begin{aligned} \eta = \frac{P_a}{P_{\text{потр}}} &= \frac{\frac{1}{2} I_{m1} U_{m1}}{\frac{1}{2} I_0 U_{\text{пит}}} = \frac{1}{2} \frac{S \cdot U_m \gamma_1(\theta) U_{m1}}{S \cdot U_m \gamma_0(\theta) U_{\text{пит}}} \Big|_{(U_{m1} \cong U_{\text{пит}})} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\gamma_1(\theta)}{\gamma_0(\theta)}, \text{ если } \theta = \frac{\pi}{2}, \text{ то } \eta \approx 79\%. \end{aligned} \quad (12.43)$$

Резонансное умножение частоты колебаний

Резонансное умножение частоты можно осуществить резонансным усилителем в режиме большого сигнала, для этого:

а) настроить колебательный контур на требуемую частоту, например, если сигнал имеет частоту ω_1 , а частота на выходе должна быть умножена в n раз, то $\omega_p = n\omega_1$;

б) выбрать угол отсечки θ таким, чтобы амплитуда гармоники умноженной частоты была максимальной.

Пояснение: если частота умножается на 2, то угол отсечки $\approx 60^\circ$, если частота умножается на 3, то $\theta \approx 40^\circ$ и т.д.

Выпрямление и ограничение гармонических колебаний

Схема простейшего выпрямителя имеет вид (рис. 12.8).

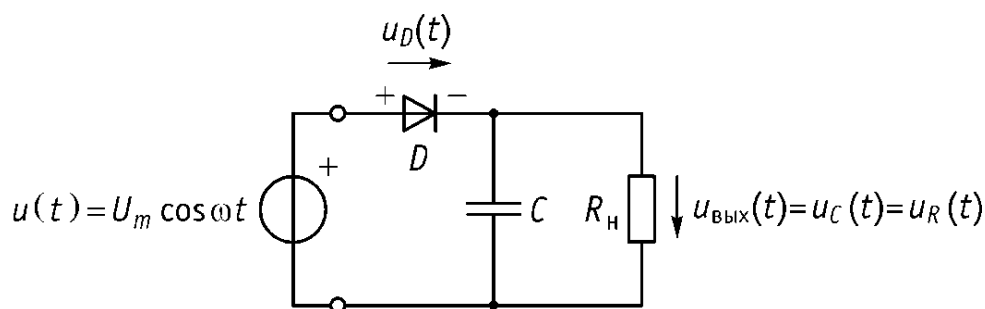


Рис. 12.8

Анализ в установившемся режиме

Считаем, что переходной процесс закончился. Пусть в момент времени t_1 , напряжение $u(t)$ достигает $u_C(t_1)$ (рис. 12.9).

При $t > t_1$ напряжение $u(t)$ становится больше $u_C(t)$, разность напряжений $(u(t) - u_C(t))$ прикладывается к диоду, диод открывается в момент времени t_1 и начинается подзаряд конденсатора. В момент времени t_2 напряжении на емкости $u_C(t_2)$ становится равным напряжению $u(t)$, напряжение на диоде становится равным нулю, диод закрывается и происходит разряд конденсатора на отрезке времени от t_2 до $t_1 + T$, в этот отрезок времени диод закрыт. При $t = t_1 + T$ процесс повторяется.

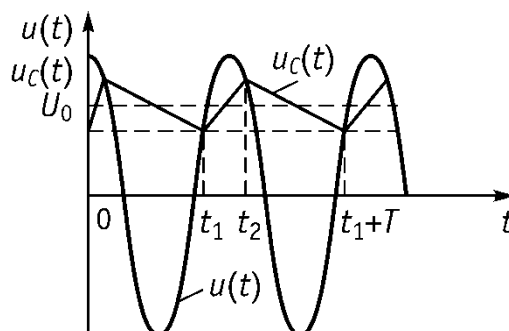


Рис. 12.9

1. Среднее значение выпрямленного напряжения

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{T+t_1} u_C(t) dt. \quad (12.44)$$

2. Отношение наибольшего и наименьшего напряжений равно

$$\frac{u_C(t_2)}{u_C(t_1)} = e^{(T+t_1-t_2)/\tau_{цр}}, \text{ где } \tau_{цр} - \text{постоянная цепи разряда емкости } (\tau_{цр} \gg \tau_{цз}).$$

Замечание. Значение выпрямленного напряжения зависит от параметров диода, генератора и нагрузки (т.к. эти параметры влияют на τ цепи – $\tau_{цр}$ и $\tau_{цз}$).

Если $\tau_{цр} = 10T$; $t_2 - t_1 = 0,25T$; $u_C(t_2)/u_C(t_1) = 1,08$.

Замечание. Обычно для получения качественного выпрямленного напряжения используют двухполупериодные схемы, одна из которых в упрощенном виде представлена на рис. 12.10.

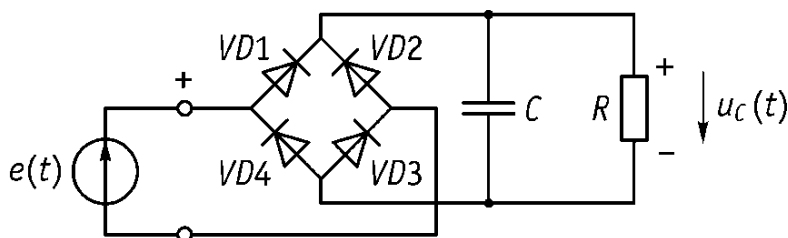


Рис. 12.10

Ограничение мгновенных значений гармонических колебаний осуществляется ограничителями, выполненными на диодах или транзисторах. Рассмотрим ограничители на диодах.

1. Ограничитель сигнала снизу (рис. 12.11).

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = \begin{cases} u_{\text{ВХ}}(t), & \text{при } u_{\text{ВХ}}(t) \geq -U_{\text{П}}, \\ -U_{\text{П}}, & \text{при } u_{\text{ВХ}}(t) < -U_{\text{П}}. \end{cases} \quad (12.45)$$

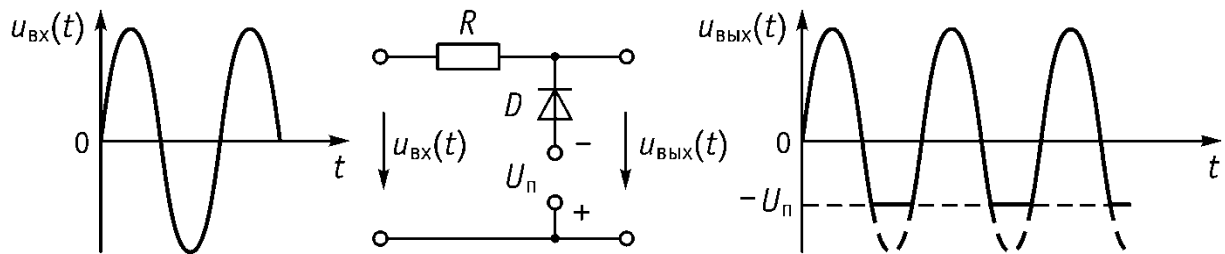


Рис. 12.11

2. Ограничитель сигнала сверху (рис. 12.12).

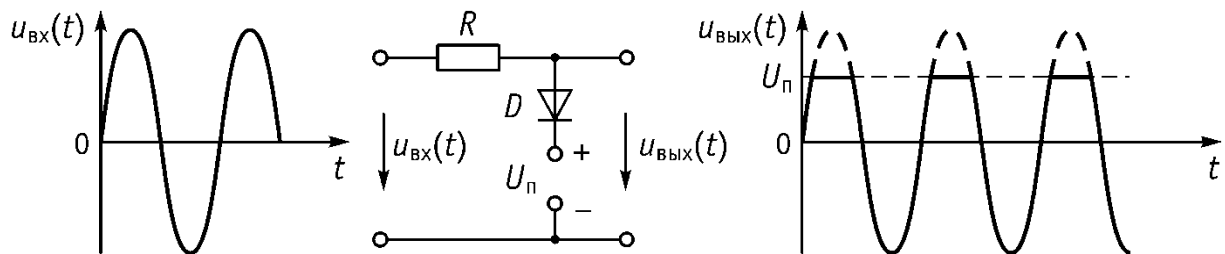


Рис. 12.12

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = \begin{cases} u_{\text{ВХ}}(t), & \text{при } u_{\text{ВХ}}(t) \leq U_{\text{П}}, \\ U_{\text{П}}, & \text{при } u_{\text{ВХ}}(t) > U_{\text{П}}. \end{cases} \quad (12.46)$$

3. Ограничитель сигнала сверху и снизу (двустороннее ограничение) (рис. 12.13).

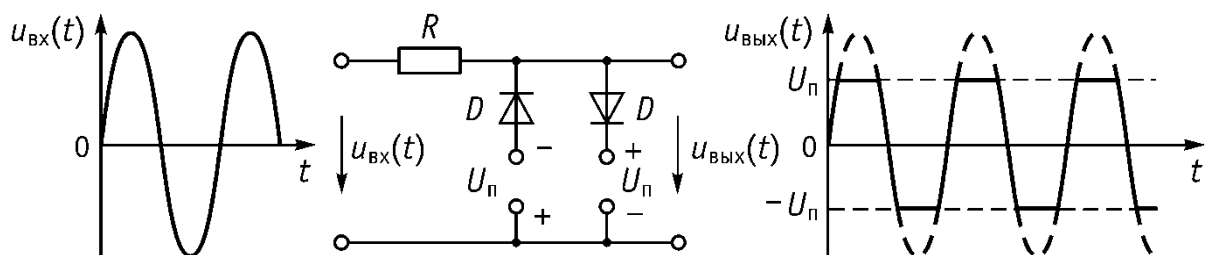


Рис. 12.13

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = \begin{cases} u_{\text{ВХ}}(t), & \text{при } -U_{\text{П}} \leq u_{\text{ВХ}}(t) \leq U_{\text{П}}, \\ U_{\text{П}}, & \text{при } u_{\text{ВХ}}(t) > U_{\text{П}}, \\ -U_{\text{П}}, & \text{при } u_{\text{ВХ}}(t) < -U_{\text{П}}. \end{cases} \quad (12.47)$$

Замечание. На основе ограничителей мгновенных значений сигнала можно создать формирователь спектра тока (напряжения).

ТЕМА 13. Электрические цепи с зависимыми источниками тока и напряжения

Лекция 23 Зависимые источники тока и напряжения

Зависимые источники тока и напряжения – это, как правило, четырех-полюсники, у которых либо входной ток (i_1), либо входное напряжение (u_1) являются управляющими величинами, а выходной ток (i_2) или выходное напряжение (u_2) являются управляемыми величинами.

Различают 4-е вида зависимых источников:

1. ИНУН – источник напряжения, управляемый напряжением.
2. ИНУТ – источник напряжения, управляемый током.
3. ИТУН – источник тока, управляемый напряжением.
4. ИТУТ – источник тока, управляемый током.

Замечание. Зависимые источники создаются, как правило, на операционных усилителях, но могут быть созданы на электронных лампах и транзисторах.

Операционные усилители (ОУ). Краткие сведения, параметры

ОУ – шестиполюсник, имеющий две пары входных зажимов и одну пару выходных зажимов.

Условное обозначение ОУ приведено на рис. 13.1 а.

Вход 1-1' – инвертирующий вход; вход 1-1'' – неинвертирующий вход;
2-2' – выход.

Схема замещения ОУ приведена на рис. 13.1 б.

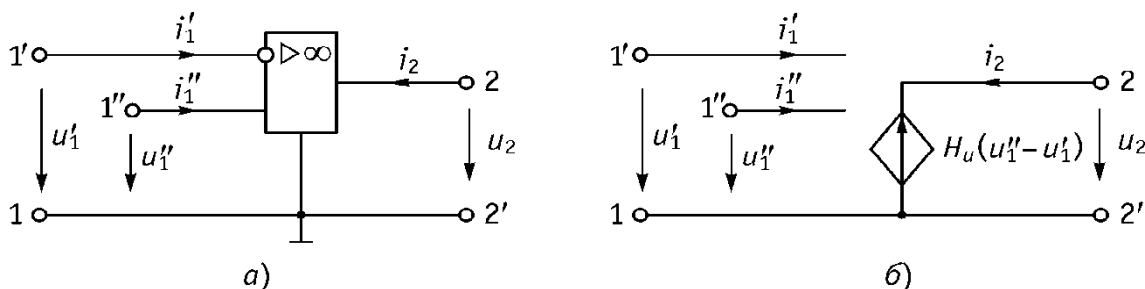


Рис. 13.1

Параметры ОУ приведены в табл. 13.1

Табл. 13.1

Параметры	Идеальные ОУ	Реальные ОУ
Коэффициент передачи – H_u	∞	Конечен
Входное сопротивление – $R_{вх}$	∞	$10^6 \dots 10^{12}$ Ом
Выходное сопротивление – $R_{вых}$	0	$10 \dots 50$ Ом
Полоса пропускания	$0 \dots \infty$	$0 \dots 2$ МГц
Зависимость от температуры окружающей среды	Нет (т.е. если $U_{вх} = 0$, то и $U_{вых} = 0$)	Есть (т.е. если $U_{вх} = 0$, то $U_{вых} = U_{шума}$)

Зависимые источники

Источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН)

Условное обозначение в схеме приведено на рис.13.2 а.

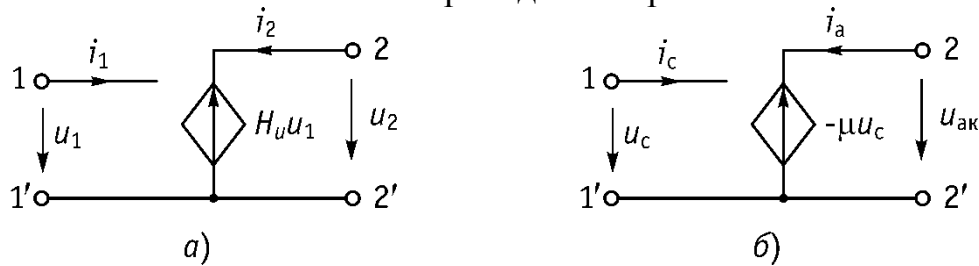


Рис. 13.2

Параметры идеального ИНУН:

$$R_{\text{вх}} = \infty, \quad i_1 = 0, \quad u_2 = H_u u_1. \quad (13.1)$$

H_u – коэффициент передачи по напряжению, характеризует усиление по напряжению, величина безразмерная.

Уравнение передачи для A -параметров

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \frac{1}{H_u} \underline{U}_2 + 0 \cdot \underline{I}_2', \\ \underline{I}_1 &= 0 \cdot \underline{U}_2 + 0 \cdot \underline{I}_2'. \end{aligned} \quad (13.2)$$

ИНУН является схемой замещения ОУ и электронной лампы (рис. 13.2 б). ИНУН представляет собой неинвертирующий усилитель.

Источник напряжения, управляемый током (ИНУТ)

Условное обозначение приведено на рис. 13.3 а.

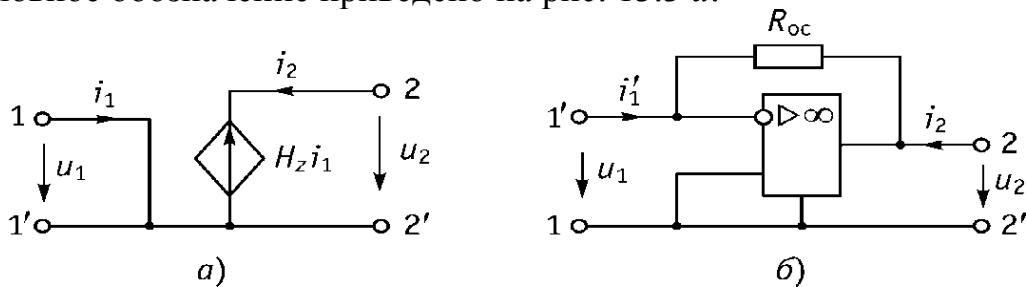


Рис. 13.3

Параметры идеального ИНУТ

$$R_{\text{вх}} = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = H_z i_1. \quad (13.3)$$

H_z – коэффициент передачи, размерность [В/А].

Уравнение передачи для A -параметров

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= 0 \cdot \underline{U}_2 + 0 \cdot \underline{I}_2', \\ \underline{I}_1 &= \frac{1}{H_z} \cdot \underline{U}_2 + 0 \cdot \underline{I}_2'. \end{aligned} \quad (13.4)$$

ИНУТ может быть создан на основе ОУ по схеме, приведенной на рис. 13.3 б.

Источник тока, управляемый напряжением (ИТУН)

Условное обозначение приведено на рис. 13.4.

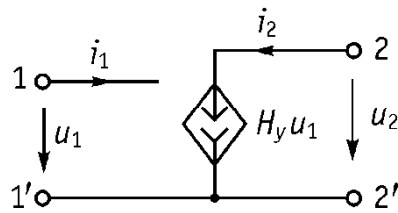


Рис. 13.4

Параметры идеального ИТУН

$$R_{\text{вх}} = \infty, \quad i_1 = 0, \quad i_2 = H_y u_1. \quad (13.5)$$

$H_y = i_2 / u_1$ – коэффициент передачи, размерность [А/В].

ИТУН является схемой замещения электронной лампы, полевого и биполярного транзисторов (рис. 13.5).

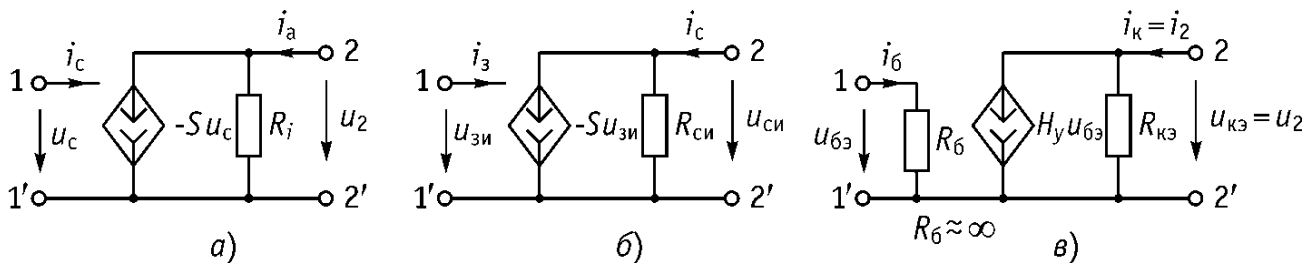


Рис. 13.5

Источник тока, управляемый током (ИТУТ)

Условное обозначение приведено на рис. 13.6 а.

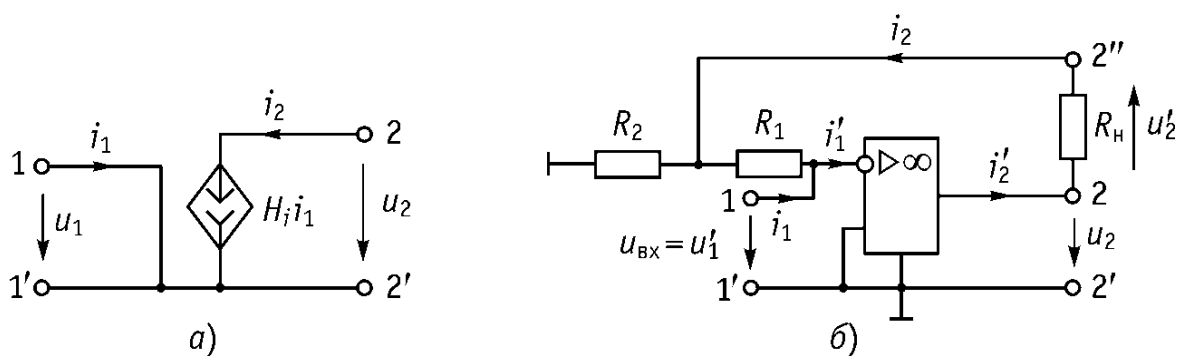


Рис. 13.6

Параметры идеального ИТУТ

$$R_{\text{вх}} = 0, \quad u_1 = 0, \quad i_2 = H_i i_1. \quad (13.6)$$

$H_i = i_2 / i_1$ – коэффициент передачи по току, безразмерная величина.

Уравнение передачи для A -параметров

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= 0 \cdot \underline{U}_2 + 0 \cdot \underline{I}_2', \\ \underline{I}_1 &= 0 \cdot \underline{U}_2 - \frac{1}{H_i} \cdot \underline{I}_2'.\end{aligned}\quad (13.7)$$

ИТУТ может быть реализован на основе ОУ по схеме, изображенной на рис. 13.6 б.

Неинвертирующий усилитель

Схема неинвертирующего усилителя приведена на рис. 13.7 а. Входное напряжение подается на неинвертирующий вход 1-1''.

Цель анализа: определить выходное напряжение u_2 , входное сопротивление $R_{\text{вх}}$, коэффициент усиления K_u .

Анализ (используем метод узловых напряжений).

1. Заменяем ОУ схемой замещения (рис. 13.7 б).
2. Обозначаем узлы и напряжения узлов и записываем уравнение узловых напряжений

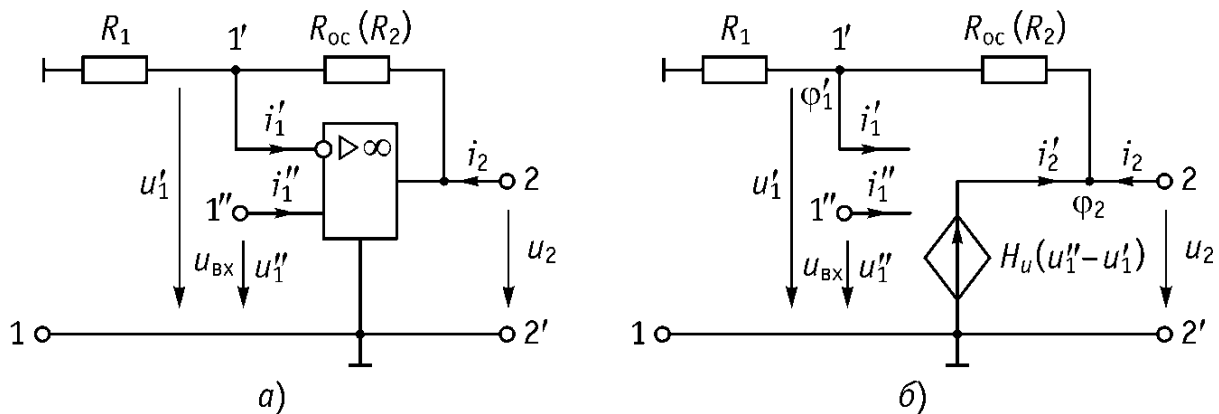


Рис. 13.7

$$\text{Узел } 1': u_1' \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{oc}} \right) - u_2 \left(\frac{1}{R_{oc}} \right) = 0, \quad (13.8)$$

$$\text{Узел } 2: u_2 = H_u (u_1'' - u_1').$$

3. Решаем уравнения относительно u_2 и $u_{\text{вх}} = u_1''$

$$K_u = \frac{u_2}{u_1''} = \frac{1}{H_u} + \frac{R_1 + R_{oc}}{R_1}. \quad (13.9)$$

Если $H_u \rightarrow \infty$, тогда

$$K_u = 1 + \frac{R_{oc}}{R_1}. \quad (13.10)$$

4. Определяем входное сопротивление

$$R_{\text{вх}} = \frac{u_1''}{i_1''} = \frac{u_1''}{0} = \infty \text{ (в идеальном случае)}. \quad (13.11)$$

$$R_{\text{вх}} \approx R_{\text{вх ОУ}} = 10\text{-}50 \text{ Ом (или } 0, \text{ в идеальном случае)}.$$

Повторитель напряжения на ОУ

Реализуется по схеме неинвертирующего усилителя (рис. 13.8 а) в которой $R_{oc} = 0$, $R_1 = \infty$.

Цель анализа: определить коэффициент передачи $K_u = u_2 / u_1''$.

Анализ

1. Заменяем ОУ схемой замещения (рис. 13.8 б).
2. Составляем ЗНК для контуров I и II

$$\begin{aligned} \text{I. } u_1' &= u_2, \\ \text{II. } u_2 &= H_u (u_1'' - u_1'). \end{aligned} \quad (13.12)$$

3. Решаем систему уравнений ЗНК относительно u_2 и u_1''

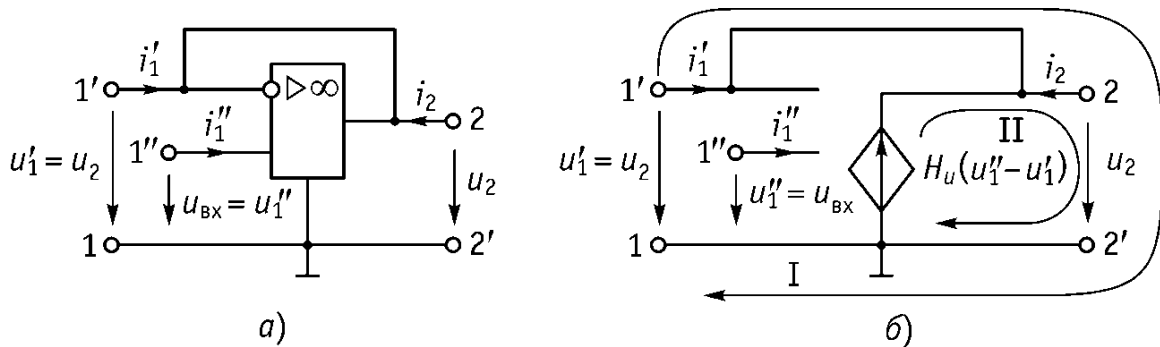


Рис. 13.8

$$u_2 (1 + H_u) = H_u u_1''; \quad K_u = u_2 / u_1'' = H_u / (1 + H_u). \quad (13.13)$$

Если $H_u \rightarrow \infty$, то $K_u = 1$ (напряжение на выходе равно напряжению на входе).

Инвертирующий усилитель на ОУ

Схема инвертирующего усилителя приведена на рис. 13.9 а.

Цель анализа: определить выходное напряжение u_2 , входное сопротивление $R_{вх}$, коэффициент усиления K_u .

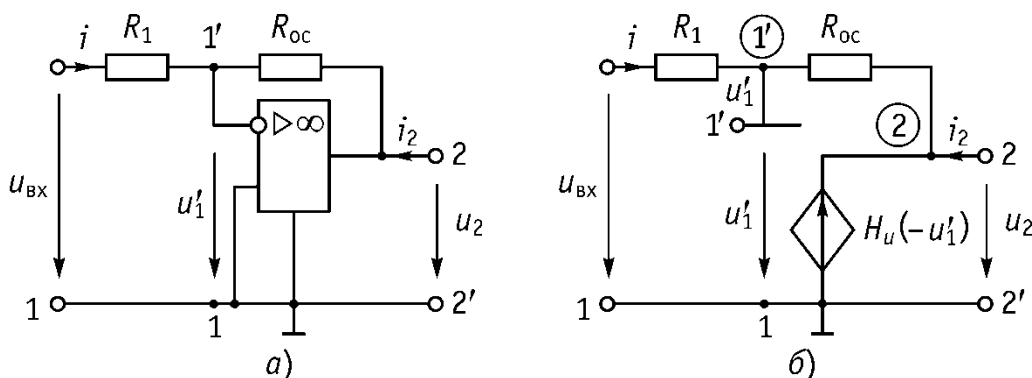


Рис. 13.9

Анализ (используем метод узловых напряжений).

1. Заменяем ОУ схемой замещения (рис. 13.9 б).
2. Обозначаем узлы и напряжения узлов.
3. Записываем уравнения узловых напряжений

$$\begin{aligned} \text{узел } 1': u_1' \left(\frac{1}{R_{oc}} + \frac{1}{R_1} \right) - u_2 \left(\frac{1}{R_{oc}} \right) - u_{BX} \frac{1}{R_1} &= 0, \\ \text{узел } 2: u_2 &= -H_u u_1'. \end{aligned} \quad (13.14)$$

4. Решаем систему уравнений относительно напряжений u_2 и u_{BX}

$$K_u = \frac{u_2}{u_{BX}} = - \frac{H_u R_{oc}}{R_{oc} + R_1 (1 + H_u)}. \quad (13.15)$$

Если $H_u \rightarrow \infty$, тогда

$$K_u = -R_{oc}/R_1. \quad (13.16)$$

При заданном R_1 подбором R_{oc} добиваются требуемого K_u .

5. Определяем входное сопротивление

$$R_{BX} = \frac{u_{BX}}{i_{BX}} = \frac{R_{oc} + R_1 (1 + H_u)}{1 + H_u}. \quad (13.17)$$

Если $H_u \rightarrow \infty$, то $R_{BX} = R_1$, $R_{ВЫХ} = R_{ВЫХ ОУ} \parallel (R_1 + R_{oc}) = R_{ВЫХ ОУ}$.

Суммирующий усилитель на ОУ (сумматор)

Схема сумматора приведена на рис. 13.10. Заданы сопротивления и тип ОУ. Известны все входные напряжения.

Цель анализа: найти выходное напряжение $u_{ВЫХ}$ ($u_{ВЫХ} = u_2$).

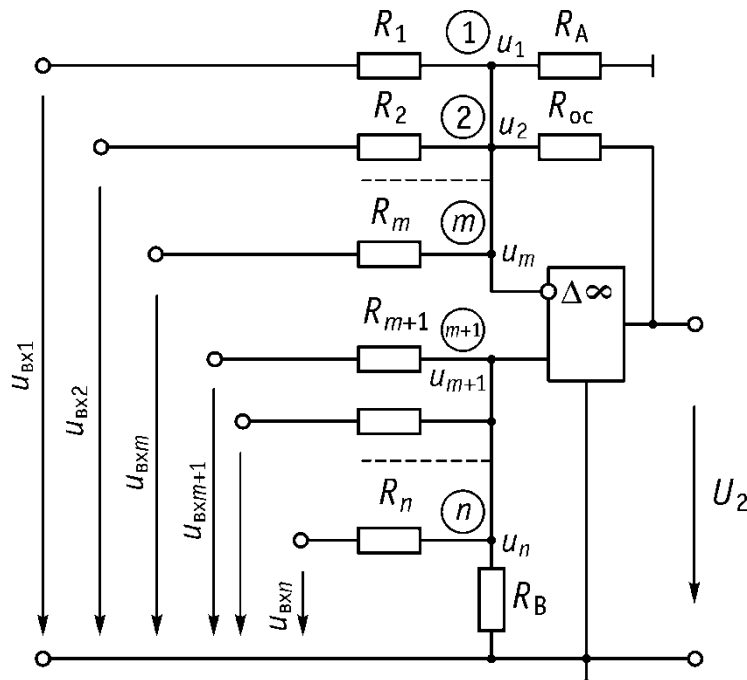


Рис. 13.10

Анализ (используем метод узловых напряжений).

1. Заменяем ОУ схемой замещения.
2. Обозначаем узлы и их напряжения.
3. Составляем систему уравнений узловых напряжений.
4. Решаем относительно $u_{ВЫХ}$ (u_2), u_{BXi} , $i=1...m$, u_{BXj} , $j=(m+1)...n$, получаем

$$u_2 = u_{\text{ВЫХ}} = -\sum_{i=1}^m u_i \frac{R_{\text{ос}}}{R_i} + \sum_{j=m+1}^n u_j \frac{R_{\text{ос}}}{R_j} \frac{\frac{1}{R_{\text{ос}}} + \frac{1}{R_A} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{R_i}}{\frac{1}{R_B} + \sum_{j=m+1}^n \frac{1}{R_j}}. \quad (13.18)$$

5. Положим $n = 2, m = 1$

$$u_{\text{ВЫХ}} = -u_1 \frac{R_{\text{ос}}}{R_1} + u_2 \frac{R_{\text{ос}}}{R_2} \frac{\frac{1}{R_{\text{ос}}} + \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_2}}. \quad (13.19)$$

Интегратор на ОУ

Выполняется по схеме инвертирующего усилителя, в котором $R_{\text{ос}}$ заменено на емкость C с сопротивлением $\underline{Z}_C = 1/(j\omega C)$. Схема приведена на рис. 13.11 а. На вход подается напряжение входа $u_{\text{ВХ}}$.

Цель анализа: определить коэффициент передачи интегратора $H_{\text{инт}}(j\omega)$, постоянную времени цепи интегратора $\tau_{\text{ц инт оу}}$, входное сопротивление $Z_{\text{вх}}(j\omega)$, модуль КПФ $|H_{\text{инт}}(j\omega)|$.

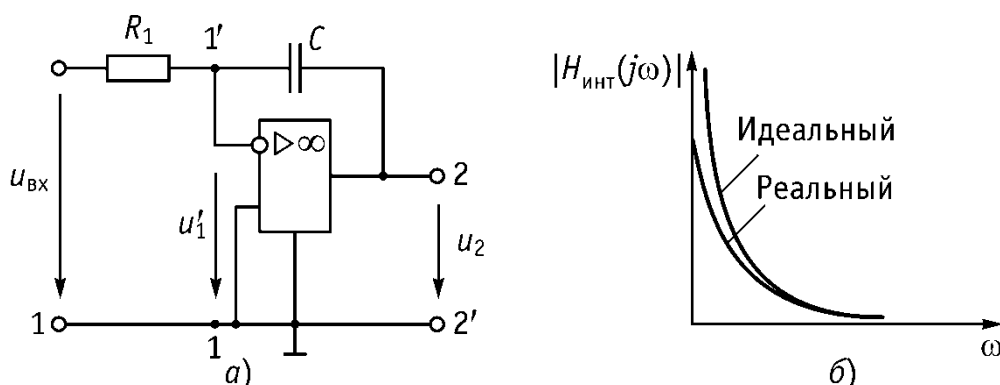


Рис. 13.11

Анализ

1. В уравнение для коэффициента усиления инвертирующего усилителя вместо $R_{\text{ос}}$ подставим $\underline{Z}_C$

$$H_{\text{инт}}(j\omega) = \frac{-\underline{Z}_C H_u}{\underline{Z}_C + R_1(1 + H_u)} = -\frac{H_u}{1 + j\omega C R_1(1 + H_u)} = -\frac{H_u}{1 + j\omega \tau_{\text{ц}}(1 + H_u)}. \quad (13.20)$$

где $\tau_{\text{ц}} = R_1 C$.

2. Коэффициент передачи $H_{\text{инт}}(j\omega)$ при $H_u \rightarrow \infty$ равен

$$H_{\text{инт}}(j\omega) = -\lim_{H_u \rightarrow \infty} \frac{H_u}{1 + j\omega \tau_{\text{ц}}(1 + H_u)} = -\frac{1}{j\omega \tau_{\text{ц}}}. \quad (13.21)$$

График $|H(j\omega)|$ приведен на рис. 13.11 б.

3. Определяем входное сопротивление интегратора ($R_{\text{ос}} = \underline{Z}_C$)

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{R_1(1+H_u) + 1/(j\omega C)}{1+H_u}. \quad (13.22)$$

Если $H_u \rightarrow \infty$, то $Z_{\text{вх}}(j\omega) = R_1$.

4. Находим характеристическое уравнение, приравняв $Z_{\text{вх}}(j\omega)$ к нулю и заменяя $j\omega$ на p , откуда определяем значение корня p

$$p = -\frac{1}{R_1 C(1+H_u)}. \quad (13.23)$$

5. Зная p , определяем постоянную цепи интегратора с ОУ ($\tau_{\text{ц инт оу}}$)

$$\tau_{\text{ц инт оу}} = |1/p| = R_1 C(1+H_u) = \tau_{\text{ц}}(1+H_u). \quad (13.24)$$

Заметим, что постоянная цепи интегратора с ОУ в $(1+H_u)$ раз больше постоянной цепи $R_1 C$ ($\tau_{\text{ц}}$).

Дифференциатор на ОУ

Выполняется по схеме инвертирующего усилителя, в котором вместо сопротивления R_1 включена емкость C (сопротивление емкости $\underline{Z}_C$) (рис. 13.12 а).

Цель анализа: определить коэффициент передачи $H_{\text{д}}(j\omega)$ дифференциатора с ОУ, постоянную времени цепи дифференциатора с ОУ $\tau_{\text{ц диф оу}}$, входное сопротивление $Z_{\text{вх}}(j\omega)$, модуль КПФ $|H_{\text{д}}(j\omega)|$.

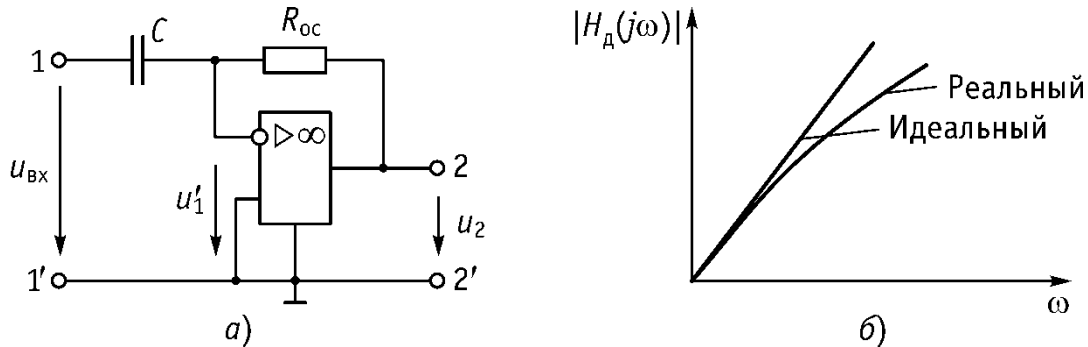


Рис. 13.12

Анализ (воспользуемся формулами для инвертирующего усилителя).

1. Коэффициент передачи дифференциатора с ОУ

$$H_{\text{д}}(j\omega) = -\frac{R_{\text{ос}} H_u}{R_{\text{ос}} + \frac{1}{j\omega C}(1+H_u)}. \quad (13.25)$$

Если $H_u \rightarrow \infty$, тогда

$$H_{\text{д}}(j\omega) = -j\omega C R_{\text{ос}} = -j\omega \tau_{\text{ц}}. \quad (13.26)$$

2. Входное сопротивление дифференциатора с ОУ

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{U_{\text{вх}}(j\omega)}{I_{\text{вх}}(j\omega)} = \frac{R_{\text{ос}} + \frac{1}{j\omega C}(1+H_u)}{1+H_u}. \quad (13.27)$$

Если $H_u \rightarrow \infty$, тогда

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{1}{j\omega C}. \quad (13.28)$$

3. Заменяем $j\omega$ на p и получим характеристическое уравнение из условия $Z_{\text{вх}}(p) = 0$ и определим корень характеристического уравнения

$$p = -\frac{1+H_u}{R_{\text{ос}}C}. \quad (13.29)$$

4. Зная p , определяем $\tau_{\text{ц диф ОУ}}$

$$\tau_{\text{ц диф ОУ}} = \left| \frac{1}{p} \right| = \frac{R_{\text{ос}}C}{1+H_u} \approx \frac{\tau_{\text{ц}}}{1+H_u}. \quad (13.30)$$

Как видно $\tau_{\text{ц диф ОУ}}$ в $(1+H_u)$ раз меньше, чем $\tau_{\text{ц}}$ пассивной цепи.

5. Модуль комплексной передаточной функции

$$|H_{\text{д}}(j\omega)| = \left| -\frac{R_{\text{ос}}H_u j\omega C}{R_{\text{ос}}j\omega C + (1+H_u)} \right|. \quad (13.31)$$

Если $H_u \rightarrow \infty$, тогда

$$|H_{\text{д}}(j\omega)| = |j\omega\tau_{\text{ц}}|. \quad (13.32)$$

График $|H_{\text{д}}(j\omega)|$ приведен на рис. 13.12 б для реального и идеального дифференциаторов.

Конвертор отрицательного сопротивления (КОС)

КОС – резистивный четырехполюсник, входное сопротивление которого равно произведению нагрузки на некоторое отрицательное вещественное число.

Схема КОС приведена на рис. 13.13 а.

Цель анализа: определить входное сопротивление $R_{\text{вх}} = u_{\text{вх}}/i_{\text{вх}} = u_1''/i_1$.

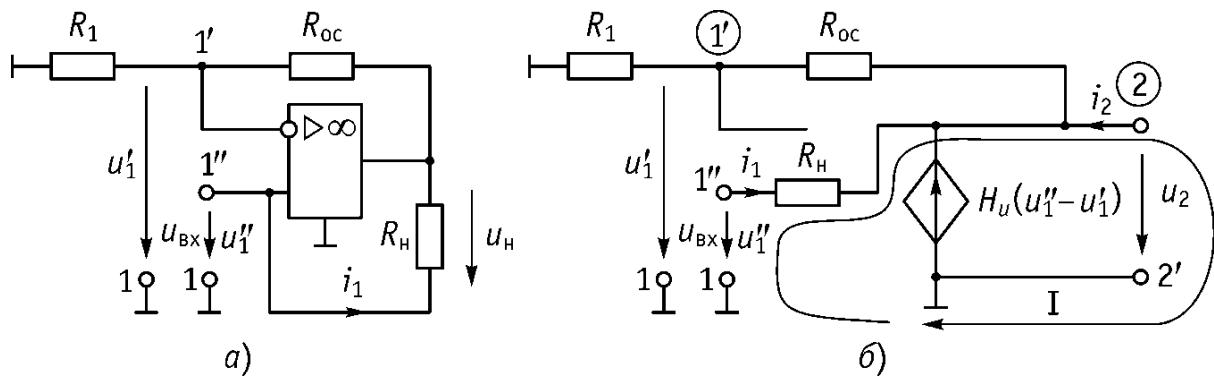


Рис. 13.13

Анализ

1. Заменяем ОУ схемой замещения (рис. 13.13 б).

2. Обозначаем узлы и составляем уравнения узловых потенциалов

$$\text{Узел 1': } u_1' \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{\text{ос}}} \right) - u_2 \frac{1}{R_{\text{ос}}} = 0, \quad (13.33)$$

$$\text{узел 2: } u_2 = H_u u_1'' - H_u u_1'.$$

3. Решаем систему относительно u_1' и u_1''

$$u_1' = \frac{H_u u_1'' R_1}{R_{oc} + R_1 (1 + H_u)}. \quad (13.34)$$

4. Выбираем контур I и составляем уравнение ЗНК

$$-u_1'' + i_1 R_H + u_2 = 0. \quad (13.35)$$

5. Определяем ток i_1

$$i_1 = \frac{u_1'' - u_2}{R_H} = \frac{u_1'' (1 - H_u) + H_u u_1'}{R_H}. \quad (13.36)$$

6. Подставляем в уравнение для тока вместо u_1' его выражение и преобразуем полученное выражение к виду $R_{bx} = u_1'' / i_1$, тогда

$$R_{bx} = \frac{u_1''}{i_1} = \frac{R_H (R_{oc} + R_1 (1 + H_u))}{R_1 + R_{oc} (1 - H_u)}. \quad (13.37)$$

Если $H_u \rightarrow \infty$, тогда $R_{bx} = -\frac{R_H R_1}{R_{oc}} = -K R_H$,

где $K = R_1 / R_{oc}$.

КОС преобразовал нагрузку R_H в другое отрицательное сопротивление. Если $K = 1$, тогда $R_{bx} = -R_H$.

ТЕМА 14. Электрические цепи с обратными связями

Лекция 24

Классификация обратных связей. Передаточная функция электрической цепи с обратной связью. Определение вида обратной связи

Электрической цепью с обратной связью называется электрическая цепь с зависимыми источниками, которая имеет по меньшей мере два пути прохождения сигнала: прямой путь от входа цепи к выходу цепи и обратный путь с выхода цепи ко входу цепи. Обратный путь реализуется специальной электрической цепью обратной связи. Наличие обратной связи может изменить свойства цепи. С помощью обратной связи можно стабилизировать рабочую точку усилителя, его режим работы, уменьшить нелинейные искажения, генерировать колебания различной формы и частоты и другие свойства.

Классификация обратной связи:

- 1) по характеру: положительная, отрицательная, комплексная обратные связи;
- 2) по структуре: внешняя, внутренняя обратные связи;
- 3) по виду элементов: активная, пассивная, линейная, нелинейная, частотно-зависимая, частотно-независимая обратные связи.

Представление цепей с обратной связью в виде двух четырехполюсников (четырёхполюсника прямой и четырёхполюсника обратной передачи сигнала, соединенных различными способами) (см. тему 10).

1. Последовательно-параллельное соединение. При анализе всей цепи удобно использовать $[H]$ -матрицу.

2. Параллельно-параллельное включение. При анализе всей цепи удобно использовать $[Y]$ -матрицу.

3. Параллельно-последовательное соединение. При анализе всей цепи удобно использовать $[F]$ -матрицу.

4. Последовательно-последовательное соединение. При анализе всей цепи удобно использовать $[Z]$ -матрицу.

Замечание: зависимые источники – инвертирующие, неинвертирующие усилители, КОС, ИОС, КПС – цепи с обратными связями.

Передаточная функция электрической цепи с ОС

Рассмотрим только передаточную функцию по напряжению (это нам необходимо в дальнейшем для анализа автоколебательных цепей) последовательно-параллельного соединения четырехполюсников прямой и обратной передачи сигналов (рис. 14.1 а).

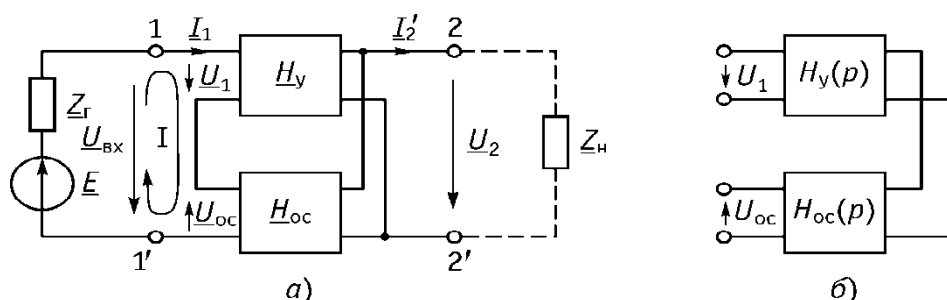


Рис. 14.1

В схеме $\underline{H}_y$ – коэффициент передачи четырехполюсника прямой передачи, $\underline{H}_{oc}$ – коэффициент передачи четырехполюсника обратной связи.

Цель анализа: определить передаточную функцию $H(p)$ и комплексную передаточную функцию $H(j\omega)$ всей цепи по напряжению.

Анализ

1. Обозначаем входной контур I, записываем уравнение ЗНК в операторной форме для входного контура и определяем $U_{вх}(p)$

$$U_{вх}(p) = U_1(p) - U_{oc}(p). \quad (14.1)$$

2. Определяем $U_{oc}(p)$. Так как $H_{oc}(p) = U_{oc}(p)/U_2(p)$, тогда

$$U_{oc}(p) = H_{oc}(p)U_2(p). \quad (14.2)$$

3. Запишем $U_2(p)$ через $U_1(p)$ и $H_y(p)$

$$U_2(p) = H_y(p)U_1(p). \quad (14.3)$$

4. Подставим в формулу $H(p) = U_2(p)/U_{вх}(p)$ выражения для $U_2(p)$ и $U_{вх}(p)$

$$H(p) = \frac{H_y(p)U_1(p)}{U_1(p) - H_{oc}U_2(p)} = \frac{H_y(p)U_1(p)}{U_1(p) - H_{oc}H_y(p)U_1(p)} \quad (14.4)$$

или

$$H(p) = \frac{H_y(p)}{1 - H_y(p)H_{oc}(p)} = \frac{H_y(p)}{1 - H_p(p)} = \frac{W(p)}{V(p)}, \quad (14.5)$$

где $H_p(p) = H_y(p)H_{oc}(p)$ – петлевое усиление, которое является передаточной функцией цепи, состоящей из четырехполюсников прямой и обратной передачи сигнала при разомкнутой обратной связи на входе (рис. 14.1 б). Заменяем $p = j\omega$, тогда получаем комплексную передаточную функцию цепи $H(j\omega)$ и комплексную передаточную функцию цепи петлевого усиления $H_p(j\omega) = H_y(j\omega)H_{oc}(j\omega)$.

Определение петлевого усиления

1. Размыкаем на входе цепь ОС (рис. 14.2).

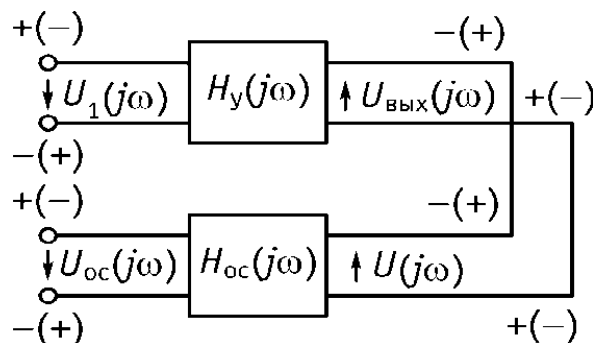


Рис. 14.2

2. Определяем комплексный коэффициент передачи

$$H_p(j\omega) = U_{oc}(j\omega)/U_1(j\omega) = H_y(j\omega)H_{oc}(j\omega). \quad (14.6)$$

Определение (установление) вида обратной связи по петлевому усилению $H_p(j\omega)$

1. Если фаза $\varphi_{H_p}(\omega)$ петлевого усиления $\pi/2 > \varphi_{H_p}(\omega) > -\pi/2$ или равна нулю или $2k\pi$, $k = 1 \dots n$, то обратная связь положительная.
2. Если фаза $\varphi_{H_p}(\omega)$ петлевого усиления $\pi/2 < \varphi_{H_p}(\omega) < -3\pi/2$ или равна $\pm\pi$ или $(2k-1)\pi$, $k = 1 \dots n$, то обратная связь отрицательная.

Замечание 1. Фаза петлевого усиления схемы, приведенной на рис. 14.2, равна 2π – обратная связь положительная.

Замечание 2. Фаза петлевого усиления схемы, приведенной на рис. 14.1 б, равна $\pm\pi$ – обратная связь отрицательная.

Определение вида обратной связи по годографу вектора петлевого усиления

1. Если годограф петлевого усиления $H_p(j\omega)$ находится в правой полуплоскости комплексной плоскости P (рис. 14.3 а), то обратная связь положительная.

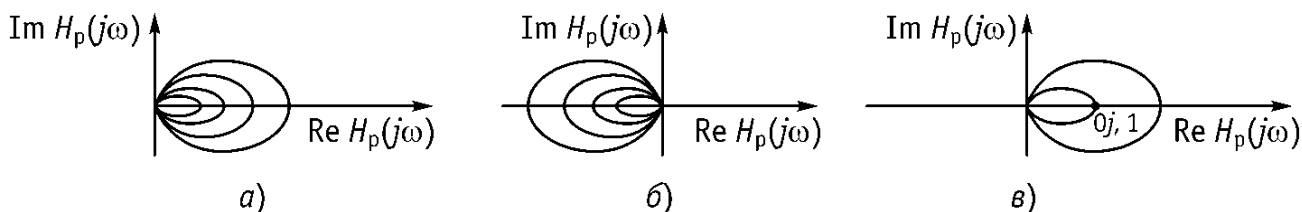


Рис. 14.3

2. Если годограф петлевого усиления находится в левой полуплоскости комплексной плоскости p (рис. 14.3 б), то обратная связь отрицательная.

При изменении частоты возможно изменение вида обратной связи с положительной на отрицательную и наоборот.

Если годограф охватывает в правой полуплоскости на действительной оси точку $(1, j0)$ или проходит через нее, то цепь с обратной связью становится неустойчивой и в цепи могут возникнуть колебания (рис. 14.3 в).

Критерии устойчивости электрической цепи с обратной связью.

Устойчивость электрических цепей с обратной связью

Устойчивая электрическая цепь – электрическая цепь, у которой возникшие свободные колебания с течением времени затухают. Если колебания не затухают, то цепь – неустойчивая.

Устойчивость (неустойчивость) электрической цепи определяется расположением полюсов передаточной функции $H(p)$ на комплексной плоскости p .

1. Если полюсы функции $H(p)$ находятся в левой полуплоскости (рис. 14.4 а), то электрическая цепь – устойчивая.

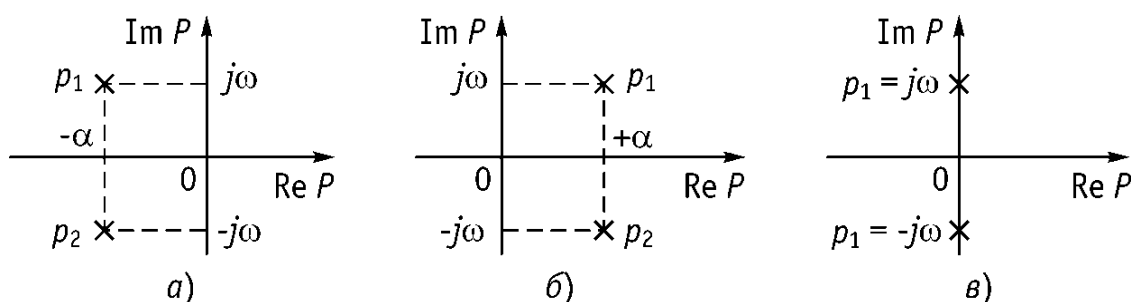


Рис. 14.4

2. Если полюсы расположены в правой полуплоскости (рис. 14.4 б) или на мнимой оси (рис. 14.4 в), то электрическая цепь – неустойчивая.

Замечание 1. Если полюсы передаточной функции $H(p)$ находятся на мнимой оси, то в цепи наблюдается установившиеся колебания с частотой ω (рис. 14.4 в).

Замечание 2. Расположение нулей передаточной функции не влияет на устойчивость (неустойчивость) электрической цепи.

Замечание 3. Добротность Q -го полюса функции $H(p)$ определяется по формуле

$$Q_k = \frac{\sqrt{\alpha_k^2 + \omega_k^2}}{2|\alpha_k|} = \frac{\omega_{0k}}{2|\alpha_k|}, \quad (14.7)$$

где $\omega_k = \sqrt{\omega_{0k}^2 - \alpha_k^2}$; $p_k = -\alpha_k \pm \sqrt{\alpha_k^2 - \omega_{0k}^2} = -\alpha_k \pm j\omega_k$.

Критерии устойчивости (неустойчивости) электрической цепи с ОС:

1. Критерий Рауса-Гурвица.
2. Критерий Михайлова.
3. Критерий Найквиста.

Критерий устойчивости Рауса-Гурвица

Критерий устойчивости Рауса-Гурвица является алгебраическим критерием, непосредственно устанавливающим условия, при которых реальные части всех полюсов отрицательны, и гласит: **электрическая цепь с обратной связью является устойчивой, если полином $V(p)$ является полиномом Гурвица. Полином Гурвица имеет следующие свойства:**

- 1) все коэффициенты полинома $V(p)$ неотрицательны, т.е. $b_0, b_1, \dots, b_m > 0$;
- 2) ни один из коэффициентов b_i не равен нулю ($b_0, b_1, \dots, b_m \neq 0$);
- 3) при изменении частоты ω от 0 до ∞ аргумент полинома Гурвица изменяется от 0 до $m\pi/2$, где m – порядок полинома Гурвица.

Замечание: чтобы полином $V(p)$ был полиномом Гурвица необходимо, чтобы определитель Рауса-Гурвица (D) и все главные миноры (D_i) были больше нуля.

Правило составления определителя D (порядок определителя равен m).

Пусть имеется полином

$$V(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0. \quad (14.8)$$

1. В первой строке определителя записываем коэффициенты полинома через один, начиная со второго

$$b_{m-1} \quad b_{m-3} \quad \dots \quad 0. \quad (14.9)$$

2. Во второй строке определителя записываем коэффициенты через один, начиная с первого

$$b_m \quad b_{m-2} \quad \dots \quad 0. \quad (14.10)$$

3. В 3-й и 4-й строках записываем соответственно 1 и 2 строки, сдвинутые на одну позицию вправо

$$\begin{array}{cccccc} 0 & b_{m-1} & b_{m-3} & \dots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-2} & \dots & 0. \end{array} \quad (14.11)$$

4. И так далее.

Пример: пусть имеется полином вида

$$V(p) = p^4 + 7p^3 + 18p^2 + 22p + 12. \quad (14.12)$$

Составим определитель Рауса-Гурвица

$$D = \begin{vmatrix} 7 & 22 & 0 & 0 \\ 1 & 18 & 12 & 0 \\ 0 & 7 & 22 & 0 \\ 0 & 1 & 18 & 12 \end{vmatrix}. \quad (14.13)$$

Вычисляем определитель. Если определитель D меньше нуля ($D < 0$), то цепь неустойчива, если $D > 0$, то цепь может быть устойчивой, но при этом необходимо определить первый минор D_1

$$D_1 = \begin{vmatrix} 7 & 22 & 0 \\ 1 & 18 & 12 \\ 0 & 7 & 22 \end{vmatrix}. \quad (14.14)$$

Если $D_1 < 0$, то цепь неустойчива, если $D_1 > 0$, то цепь может быть устойчивой, но при этом необходимо определить второй главный минор D_2

$$D_2 = \begin{vmatrix} 7 & 22 \\ 1 & 18 \end{vmatrix}. \quad (14.15)$$

Если $D_2 < 0$, то цепь неустойчива, если $D_2 > 0$, то цепь может быть устойчивой, но необходимо определить третий главный минор D_3

$$D_3 = |7|. \quad (14.16)$$

Если $D_3 < 0$, то цепь неустойчива, если $D_3 > 0$, то цепь может быть устойчивой и т.д.

Таким образом, если главный определитель D и миноры $D_1, D_2, D_3, \dots, D_{m-1}$ больше нуля, то цепь устойчива, если определитель или хотя бы один из миноров меньше нуля, то цепь неустойчива.

Критерий устойчивости Михайлова

Критерий Михайлова является, по существу, следствием критерия Рауса-Гурвица, так как основан на третьем свойстве полинома Гурвица, а именно: если при изменении частоты от 0 до ∞ аргумент полинома $V(p)$

$(\varphi_V(\omega))$ изменяется от 0 до $m\pi/2$, то цепь устойчива, в противном случае – неустойчива.

$$\begin{aligned}\varphi_V(\infty) - \varphi_V(0) &= \frac{m\pi}{2} - \text{цепь устойчива;} \\ \varphi_V(\infty) - \varphi_V(0) &\neq \frac{m\pi}{2} - \text{цепь неустойчива.}\end{aligned}\quad (14.17)$$

Геометрический смысл критерия Михайлова: годограф функции $V(j\omega)$ устойчивой цепи при изменении частоты ω от 0 до ∞ будет последовательно обходить в положительном направлении m квадрантов комплексной плоскости.

На рис. 14.5 а и б приведен пример устойчивой цепи для $m = 2$ и $m = 4$, на рис. 14.5 в приведен пример неустойчивой цепи для $m = 4$.

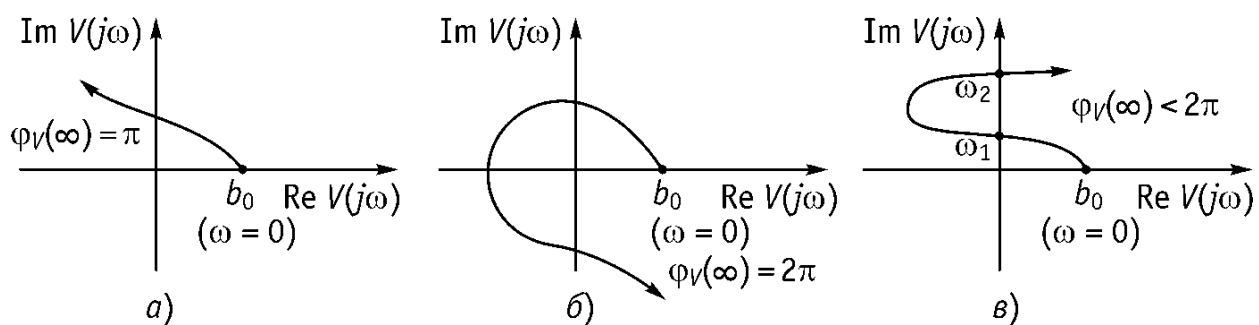


Рис. 14.5

Критерий устойчивости Найквиста

Критерий позволяет определить устойчивость (неустойчивость) электрической цепи с ОС по свойствам разомкнутой цепи (при разомкнутой обратной связи): если годограф передаточной функции $H_p(j\omega)$ разомкнутой цепи (петлевого усиления) при изменении частоты охватывает точку с координатами $(1; j0)$ комплексной плоскости или проходит через эту точку, то цепь неустойчива, а если годограф не охватывает точку $(1; j0)$, то цепь устойчива.

Замечание 1. Из критерия Найквиста можно получить условия самовозбуждения цепи с обратной связью и условие стационарности

1. Амплитудное условие

$$|H_p(j\omega)| = |H_y(j\omega) \cdot H_{oc}(j\omega)| > 1. \quad (14.18)$$

2. Условие баланса фаз

$$\varphi_p(\omega) = \varphi_y(\omega) + \varphi_{oc}(\omega) = 2\pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (14.19)$$

3. Условие баланса амплитуд

$$|H_p(j\omega)| = 1. \quad (14.20)$$

Замечание 2. Если $|H_p(j\omega)| > 1$ и $\varphi_p(\omega) = 2\pi k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, то возникают колебания с нарастающей амплитудой – нестационарный режим работы цепи (этап самовозбуждения). Если $|H_p(j\omega)| = 1$ и $\varphi_p(\omega) = 2\pi k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, то это соответствует стационарному режиму работы, – наличию гармонических колебаний с постоянной амплитудой.

Замечание 3. Условие баланса фаз позволяет определить частоту генерации цепи, а условие баланса амплитуд позволяет определить амплитуду колебаний на частоте генерации в стационарном режиме.

ТЕМА 15. Автоколебательные цепи

Лекция 25

Физические процессы в автоколебательных цепях. LC-генератор с трансформаторной обратной связью

Автоколебательные цепи – это активные электрические цепи, в которых без посторонних воздействий за счет помех или случайных возмущений тока (дробовой эффект, тепловое движение электронов в активных элементах и сопротивления) возникают колебания, которые называются автоколебаниями цепи.

Автоколебательные цепи называются генераторами или автогенераторами.

Классификация автогенераторов

1. По принципу работы подразделяются на: генераторы с внешней и генераторы с внутренней обратной связью (ОС).
2. По форме колебаний подразделяются на: генераторы гармонических и негармонических колебаний.
3. По пассивной элементной базе и виду ОС подразделяются на: LC-генераторы с трансформаторной ОС; LC-генераторы с автотрансформаторной ОС (индуктивная трехточка); LC-генераторы с емкостной ОС (емкостная трехточка); RC-генераторы с мостовыми схемами обратной связи; RC-генераторы с лестничной схемой ОС.
4. По активной элементной базе подразделяются на: ламповые, транзисторные, на туннельных диодах, на ОУ, на диодах Ганна, на лавинно-пролетных диодах, на отражательных клистродах, на магнитронах, на лампах бегущей волны (ЛБВ) и др.

Физические процессы в автоколебательных цепях

Пусть имеется параллельный колебательный контур (рис. 15.1а)), к которому на время был подключен генератор. В контуре возникнут колебания. Составим дифференциальное уравнение и найдем выражение для напряжения на контуре.

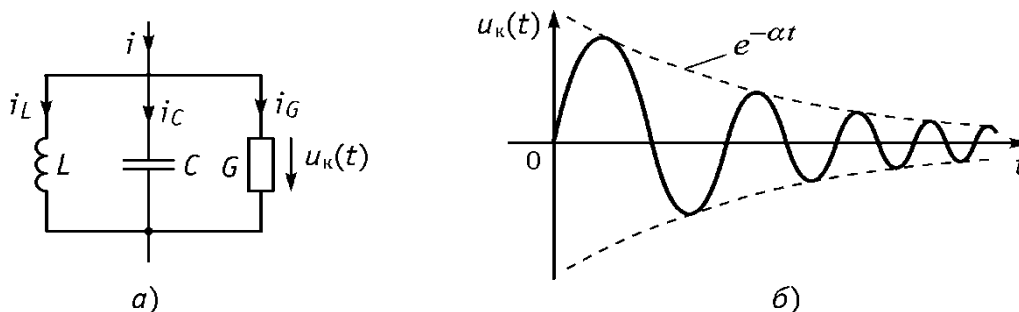


Рис. 15.1

Уравнение ЗТК при подключенном генераторе сигнала $i_L + i_C + i_G = i$.

Уравнение ЗТК при отключенном генераторе сигнала $i_L + i_C + i_G = 0$.

Выразим токи через напряжение на контуре $u_k(t)$, получим интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{L} \int u_{\kappa}(t) dt + C \frac{du_{\kappa}(t)}{dt} + u_{\kappa}(t) G = 0. \quad (15.1)$$

Приведем это уравнение к дифференциальному, взяв производную по времени

$$\frac{d^2 u_{\kappa}(t)}{dt^2} + \frac{du_{\kappa}(t)}{dt} \frac{G}{C} + \frac{u_{\kappa}(t)}{LC} = 0, \quad (15.2)$$

где $G = 1/R_{\kappa}$.

Запишем решение уравнения для комплексно-сопряженных корней

$$u_{\kappa}(t) = U_{m\kappa} e^{-\alpha t} \sin(\omega_c t + \theta), \quad (15.3)$$

где $U_{m\kappa}$ – амплитуда напряжения на контуре при $t = 0$; ω_c – частота собственных колебаний.

График полученного решения для $\theta = 0$ приведен на рис. 15.1 б). Видно, что колебание носит затухающий характер. Затухание происходит из-за потери энергии в пассивном сопротивлении контура. Чтобы амплитуда колебаний на контуре была постоянной, необходимо компенсировать потери энергии. Потери энергии в контуре можно компенсировать за счет положительной обратной связи, когда часть энергии с контура снимается и подается на вход усилителя, нагрузкой которого является колебательный контур.

Замечание. Нагрузкой усилителя может быть не только колебательный контур, нагрузкой может быть и резистивное сопротивление.

Принцип работы автогенератора можно коротко объяснить следующим образом. При появлении на входе усилителя внешней помехи или собственных шумов, которые имеют довольно широкий спектр, все составляющие спектра усиливаются усилителем и приобретают сдвиг фаз, равный 180 градусов. С выхода усилителя составляющие спектра поступают на вход цепи обратной связи. Гармонические составляющие, для которых не выполняется условие баланса фаз $\varphi_{H_p}(\omega) = 2\pi k$, проходя цепь обратной связи, приобретают сдвиг фаз, отличающийся от 180 градусов, будут складываться на входе усилителя не в фазе с соответствующими составляющими спектра. После прохождения нескольких циклов амплитуды этих гармонических составляющих практически будут равны нулю. Гармоническая составляющая, для которой выполняется амплитудное условие (14.18): $|H_p| = |H_y(j\omega) \cdot H_{oc}(j\omega)| > 1$ и условие баланса фаз (14.19): $\varphi_{H_p}(\omega) = 2\pi k$, проходя цепь обратной связи, приобретает сдвиг фазы, равный 180 градусов. Эта гармоника, будет складываться на входе усилителя в фазе с составляющей спектра той же частоты, при этом ослабление, которое испытывает данная гармоника при прохождении цепи обратной связи будет компенсироваться с избытком усилением усилителя, ибо выполняется амплитудное условие (14.20): $|H_p| = |H_y(j\omega) \cdot H_{oc}(j\omega)| > 1$. Проходя следующий цикл, гармоника данной частоты еще больше возрастет по амплитуде. Рост амплитуды напряжения на выходе усилителя приведет к росту напряжения на входе усилителя, что приведет к уменьшению средней крутизны проходной ВАХ транзистора усилительного каскада, в результате чего, в конечном итоге, амплитудное условие пе-

переходит в условие баланса амплитуд $|H_p| = |H_y(j\omega) \cdot H_{oc}(j\omega)| = 1$, при этом наступает стационарный режим работы генератора.

Замечание 1. Из амплитудного условия (14.18) устанавливаются соотношения между параметрами элементов схемы, необходимые для реализации режима самовозбуждения.

Замечание 2. Из условия баланса амплитуд (14.20) определяется средняя крутизна и амплитуда выходного напряжения в стационарном режиме.

Замечание 3. Из условия баланса фаз (14.19) определяется частота генерации.

LC-генератор с трансформаторной обратной связью

Схема и эквивалентная схема (транзистор заменен на ИТУН) LC-генератора с трансформаторной обратной связью приведены на рис. 15.2 а и б.

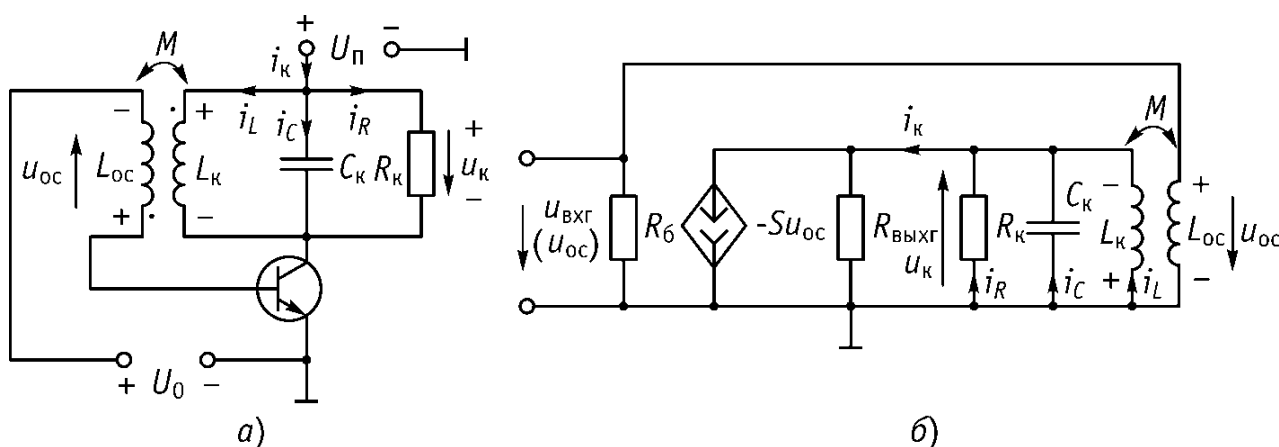


Рис. 15.2

Цель анализа: найти соотношение между параметрами схемы в режиме самовозбуждения (условие самовозбуждения), среднюю крутизну S_{cp}^* в стационарном режиме, частоту генерации ω_r , амплитуду напряжения ОС, амплитуду тока I_{mk}^* в контуре, амплитуду выходного напряжения U_{mk}^* генератора в стационарном режиме.

Классический метод анализа

Режим самовозбуждения

1. Составляем дифференциальное уравнение автогенератора.

а. Составляем уравнение ЗТК $i_k = i_R + i_C + i_L$.

б. Выражаем токи через напряжение

$$\frac{u_k(t)}{R_k} + C \frac{du_k(t)}{dt} + \frac{1}{L_k} \int u_k(t) dt = i_k(t), \quad (15.4)$$

где R_k – активное сопротивление контура ($R_k = R_{0з}$, если $\omega = \omega_0$).

в. Возьмем производную по времени правой и левой частей ЗТК, учтем что

$$R_{\text{выхт}} \gg R_k \text{ и что } i_k(t) = -Su_{oc}(t), \quad u_{oc}(t) = -\frac{M}{L} u_k(t), \quad u_{oc}(t) = -M \frac{di_L(t)}{dt},$$

$u_k(t) = L_k \frac{di_L(t)}{dt}$, сделаем преобразование, получим дифференциальное уравнение автогенератора

$$\frac{du_k^2(t)}{dt^2} + \left(\frac{G_k}{C_k} - \frac{S(u_{oc}) \cdot M}{C_k L_k} \right) \frac{du_k(t)}{dt} + \frac{1}{L_k C} u_k(t) = 0, \quad (15.5)$$

где $S(u_{oc})$ означает, что $S = f(u_{oc})$.

2. Определяем характеристическое уравнение

$$p^2 + \left(\frac{G_k}{C_k} - \frac{S(u_{oc}) \cdot M}{C_k L_k} \right) p + \omega_0^2 = 0. \quad (15.6)$$

Полагая, что в момент самовозбуждения рабочая точка находится на линейном участке проходной ВАХ (это необходимо для реализации большого усиления и, соответственно, реализации амплитудного условия), амплитуда возмущений мала, крутизна $S(u_{oc})$ является максимальной постоянной величиной и не зависит от U_{moc} (метод линеаризации), найдем корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm j\omega, \quad (15.7)$$

где $\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{G_k}{C_k} - \frac{S \cdot M}{C_k L_k} \right)$.

3. Из критерия устойчивости (неустойчивости) следует, что схема неустойчива, если действительная часть полюса больше нуля ($\text{Re } p > 0$), т.е.

$$(-\alpha) > 0 \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{G_k}{C_k} - \frac{S \cdot M}{C_k L_k} \right) < 0. \quad (15.8)$$

Из этого выражения определяем соотношение параметров в режиме самовозбуждения

$$M > G_k L_k / S.$$

Полученное соотношение называется условием самовозбуждения.

4. Исследуем полученное выражение. Сначала определим критический коэффициент взаимной индукции $M_{кр}$

$$M = G_k L_k / S = M_{кр}, \quad (15.9)$$

где $G_k = \frac{1}{R_{03}}$. (При наличии сопротивления R_1 в цепи L и наличии сопротивления

R_2 в цепи C $R_{03} = \frac{\rho^2 + R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, если $\rho \gg R_1 R_2$, тогда $R_{03} = \frac{\rho^2}{R_1 + R_2}$ и $M_{кр} = \frac{C_k (R_1 + R_2)}{S}$).

Если $M > M_{кр}$ – наступает самовозбуждение, если $M < M_{кр}$ – самовозбуждение не наступает.

Мягкий и жесткий режимы самовозбуждения

1. Мягкий режим самовозбуждения – это режим, при котором амплитуда колебаний плавно нарастает при увеличении взаимной индуктивности M от критического значения $M_{кр}$ ($M > M_{кр}$) и плавно уменьшается при уменьшении M от больших значений до $M_{кр}$ (рис. 15.3). Мягкий режим возникает, если рабочая точка выбрана на линейном участке проходной ВАХ.

2. Жесткий режим самовозбуждения – это режим, при котором амплитуда колебания возникает скачком при значении $M > M_{кр\text{ возб}}$, затем плавно увеличивается с увеличением M . При уменьшении M амплитуда колебания уменьшается и при $M \leq M_{кр}$ амплитуда колебаний скачком уменьшается до 0 (рис. 15.4). Этот режим возникает, если рабочая точка выбрана на нижнем изгибе проходной ВАХ.

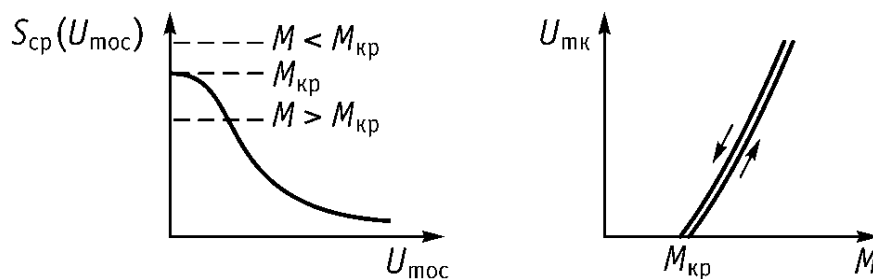


Рис. 15.3

Достоинства мягкого режима – плавное изменение амплитуды выходного напряжения. Недостаток – низкий КПД.

Достоинства жесткого режима – высокий КПД. Недостаток – невозможность плавного регулирования амплитуды $U_{тк}$ выходного напряжения.

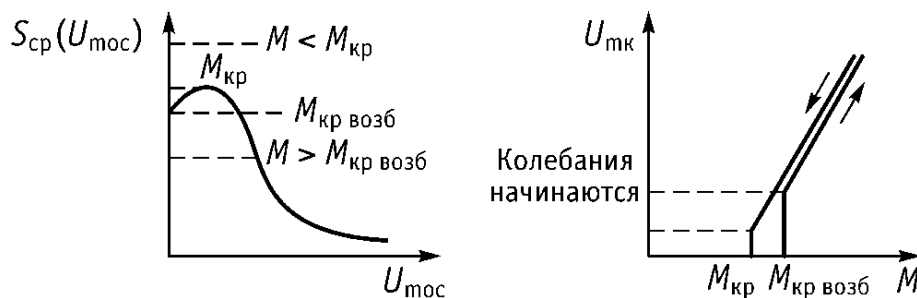


Рис. 15.4

Достоинства мягкого и жесткого режимов – можно реализовать, если в LC -генераторе с трансформаторной связью включить RC -цепь смещения. Тогда процесс самовозбуждения и режим стационарности можно объяснить графически (рис. 15.5).

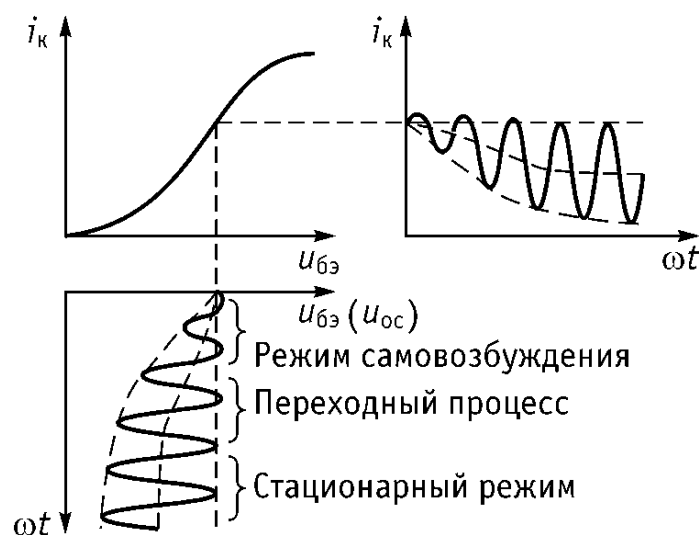


Рис. 15.5

Стационарный режим работы LC-генератора с трансформаторной обратной связью

После возникновения колебаний (после самовозбуждения) наступает переходный процесс, при котором выходное напряжение растет, напряжение обратной связи (u_{oc}) растет, а средняя крутизна S_{cp} начинает падать. Наступает момент, когда средняя крутизна S_{cp} принимает некоторое постоянное значение – стационарное значение S_{cp}^* и рост напряжения прекращается. Наступает стационарный режим работы автогенератора (рис. 15.6).

Анализ стационарного режима

1. Определим среднюю крутизну по первой гармонике тока, выбрав рабочую точку на линейном участке проходной ВАХ (рис. 15.7 а)

$$S_{cp}(U_{moc}) = I_{m1} / U_{moc} \quad (15.10)$$

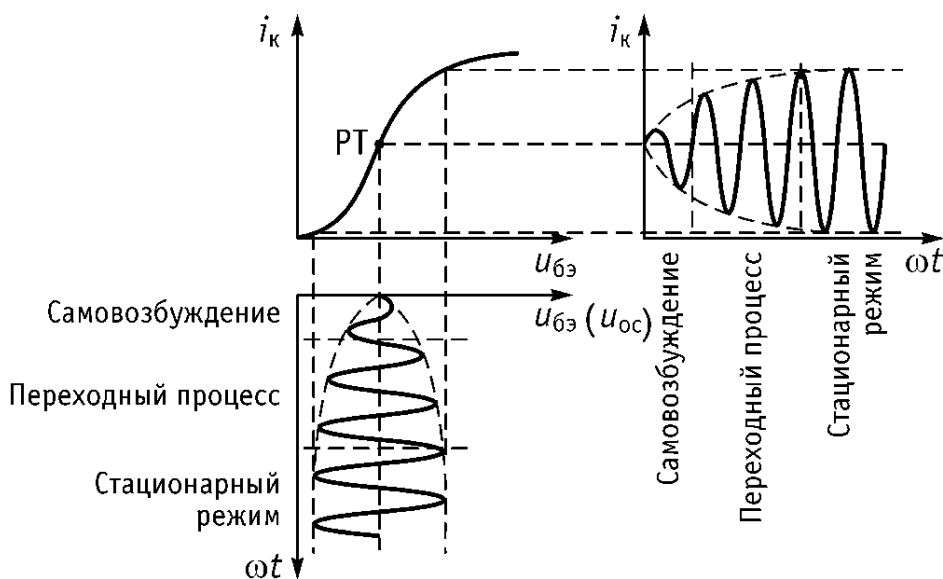


Рис. 15.6

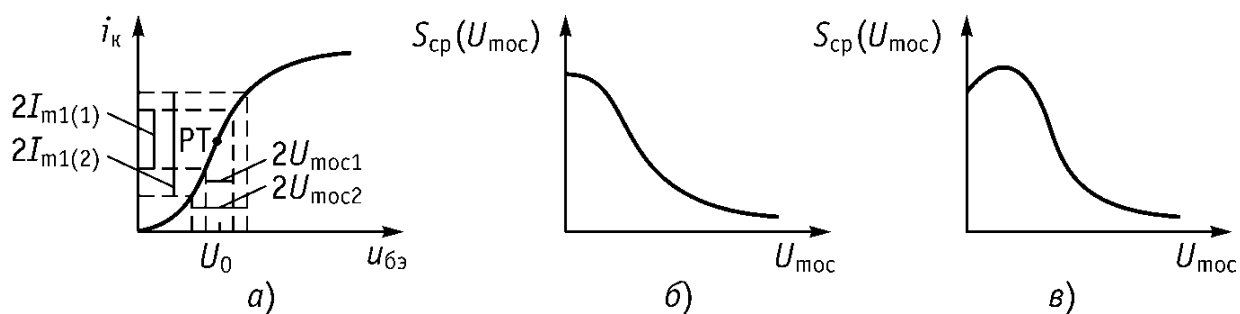


Рис. 15.7

$$S_{cp}(U_{moc1}) = \frac{I_{m1(1)}}{U_{moc1}}, S_{cp}(U_{moc2}) = \frac{I_{m1(2)}}{U_{moc2}} \text{ и т.д.} \quad (15.11)$$

2. Строим зависимость $S_{cp}(U_{moc})$ (рис. 15.7 б).

Замечание. Если рабочую точку выбрать на нижнем изгибе проходной ВАХ и построить зависимость $S_{cp}(U_{moc})$, то получим график, представленный на рис. 15.7 в.

3. В стационарном режиме средняя крутизна S_{cp} является постоянной величиной (S_{cp}^*), и определяется из условия, что реальная часть корня характеристического уравнения равна нулю ($\text{Re } p = \alpha = 0$),

$$\alpha = (M / 2CL)(GL / M - S_{cp}^*(U_{moc})) = 0, \text{ откуда}$$

$$S_{cp}^* = \frac{G_k L_k}{M}. \quad (15.12)$$

4. Определяем амплитуду напряжения обратной связи U_{moc}^* в стационарном режиме. Для этого на кривой средней крутизны $S_{cp}(U_{moc})$ строим прямую, равную значению стационарной средней крутизны S_{cp}^* (рис. 15.8).

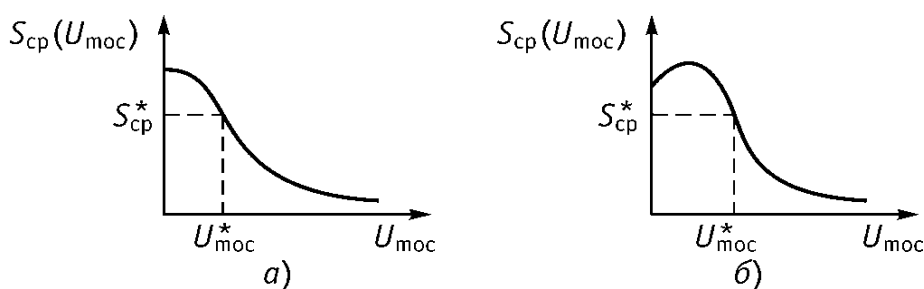


Рис. 15.8

5. Зная U_{moc}^* , определяем амплитуды тока I_{mk}^* в контуре и напряжения U_{mk}^* на контуре (выходное напряжение) в стационарном режиме

$$I_{mk}^* = S_{cp}^* \cdot U_{moc}^*, \quad U_{mk}^* = S_{cp}^* \cdot U_{moc}^* \cdot R_{03} = H_y^* \cdot U_{moc}^*, \quad (15.13)$$

где $R_{03} = R_k$ – эквивалентное сопротивление контура на резонансной частоте (частоте генерации), $H_y^* = S_{cp}^* \cdot R_{03}$.

Замечание. Стационарный режим устойчив, если производная средней крутизны в точке стационарной средней крутизны меньше нуля ($dS_{\text{cp}}(U_{\text{мос}})/dU_{\text{мос}} < 0$) и **стационарный режим неустойчив**, если производная средней крутизны в точке стационарной средней крутизны больше нуля ($dS_{\text{cp}}(U_{\text{мос}})/dU_{\text{мос}} > 0$).

6. Определяем частоту генерации из условия баланса фаз.

а. Определяем петлевое усиление $H_p(j\omega)$ в частотной области

$$\begin{aligned} H_p(j\omega) &= H_y(j\omega)H_{\text{ос}}(j\omega) = \frac{-S \cdot R_{\text{вых Т}} \cdot Z_{\text{к}}(j\omega)}{R_{\text{вых Т}} + Z_{\text{к}}(j\omega)} \left(-\frac{M}{L} \right) = \\ &= \frac{j\omega/C}{-\omega^2 + j\omega G/C + \omega_0^2} \frac{M \cdot S}{L} = |H_p(j\omega)| e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\omega G/C}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)}, \end{aligned} \quad (15.14)$$

здесь учтено, что $R_{\text{вых Т}} \gg Z_{\text{к}}(j\omega)$.

б. Определяем частоту генерации из условия баланса фаз

$$\varphi_p(\omega_{\Gamma}) = \varphi_y(\omega_{\Gamma}) + \varphi_{\text{ос}}(\omega_{\Gamma}) = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\omega G/C}{\omega_0^2 - \omega^2} = 2k\pi, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (15.15)$$

для $k = 0$ $\arctg(\omega G/C)/(\omega_0^2 - \omega^2)$ должен быть равен $\pi/2$, то есть $\arctg(\omega G/C)/(\omega_0^2 - \omega^2) = \pi/2$, откуда частота генерации равна

$$\omega_{\Gamma} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (15.16)$$

Лекция 26

Обобщенная трехточечная схема генератора. *RC*-генераторы с лестничной обратной связью

Схема генератора приведена на рис. 15.9 а.

Цель анализа: установить соотношения между $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$.

Порядок анализа

1. Активный элемент (АЭ) сдвигает фазу напряжения $\underline{U}_к$ относительно фазы $\underline{U}_{вх}$ на 180° . Напряжение $\underline{U}_к$ равно напряжению $\underline{U}_{вхос}$, напряжение $\underline{U}_{вх}$ равно напряжению $\underline{U}_{выхос}$.
2. Для выполнения условия баланса фаз необходимо, чтобы цепь обратной связи сдвигала фазу напряжения $\underline{U}_{выхос}$ на своем выходе на 180° относительно фазы $\underline{U}_{вхос}$.
3. Покажем при каких соотношениях $\underline{Z}_1$ и $\underline{Z}_2$ напряжение $\underline{U}_{вх}$ ($\underline{U}_{выхос}$) и $\underline{U}_к$ ($\underline{U}_{вхос}$) будут сдвинуты друг относительно друга на 180° (рис. 15.9 б).

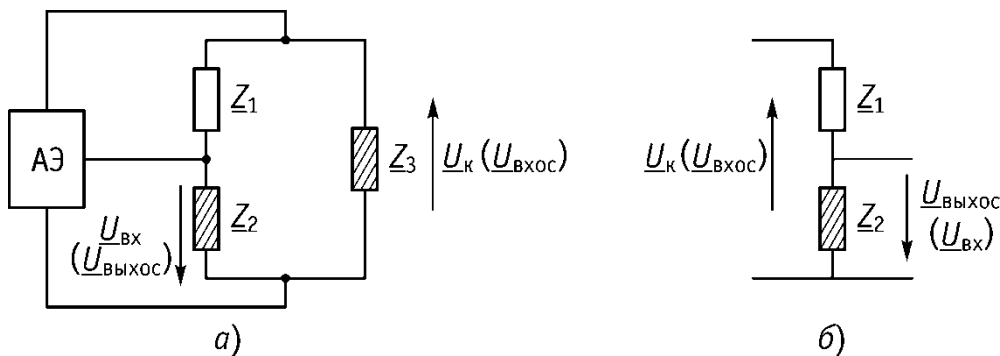


Рис. 15.9

Найдем выражение для $\underline{U}_{выхос}$

$$\underline{U}_{выхос} = \frac{\underline{U}_к \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}, \quad (15.17)$$

где $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$ – реактивные сопротивления.

А. Если $X_1 < 0, X_2 > 0$ и $|X_1| > |X_2|$, тогда

$$\underline{U}_{выхос} = \frac{\underline{U}_к jX_2}{-jX_1 + jX_2} = -\frac{X_2 \underline{U}_к}{X_1 - X_2}, \quad (15.18)$$

где $\underline{Z}_1 = -jX_1 = -j/(\omega C)$, $\underline{Z}_2 = jX_2 = j\omega L$, $\underline{Z}_3$ определяется из условия резонанса

$$\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 0 \quad (15.19)$$

и из условия $|X_1| > |X_2|$ находим

$$\underline{Z}_3 = jX_1 - jX_2 = j\omega L_3, \quad (15.20)$$

имеем индуктивную трехточку.

Б. Если $X_1 > 0, X_2 < 0$ и $|X_1| > |X_2|$, тогда

$$\underline{U}_{выхос} = \frac{-jX_2 \underline{U}_к}{jX_1 - jX_2}, \quad (15.21)$$

откуда $\underline{Z}_1 = jX_1 = j\omega L_1$, $\underline{Z}_2 = -jX_2 = -j/(\omega C_2)$, $\underline{Z}_3$ определяется из условия резонанса

$$\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 0 \quad (15.22)$$

и из условия $|X_1| > |X_2|$ находим $\underline{Z}_3 = -\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2 = -jX_1 + jX_2 = -j(X_1 - X_2)$ и

$$\underline{Z}_3 = -j \frac{1}{\omega C_3}. \quad (15.23)$$

В этом случае имеем емкостную трехточку.

RC-генераторы с лестничной ОС

Предназначены для получения колебаний низкой частоты. Схема RC-генератора с лестничной обратной связью приведена на рис. 15.10 а.

Пояснение к схеме.

1. $R_6 \gg R \gg R_k$, $C_p \gg C$, $R_{\text{выхтр}} \gg R_k$.

2. Известно, что RC-цепь (рис. 15.10 а или б) сдвигает фазу выходного напряжения $u_{\text{вых}}$ относительно фазы входного напряжения $u_{\text{вх}}$ в пределах от 0 до $-\pi/2$ или от $\pi/2$ до 0 при изменении частоты от 0 до ∞ . Поэтому для получения фазового сдвига между выходным и входным напряжениями цепи ОС, равного 180° , необходимо взять, по крайней мере, три звена RC-цепи (или CR-цепи).

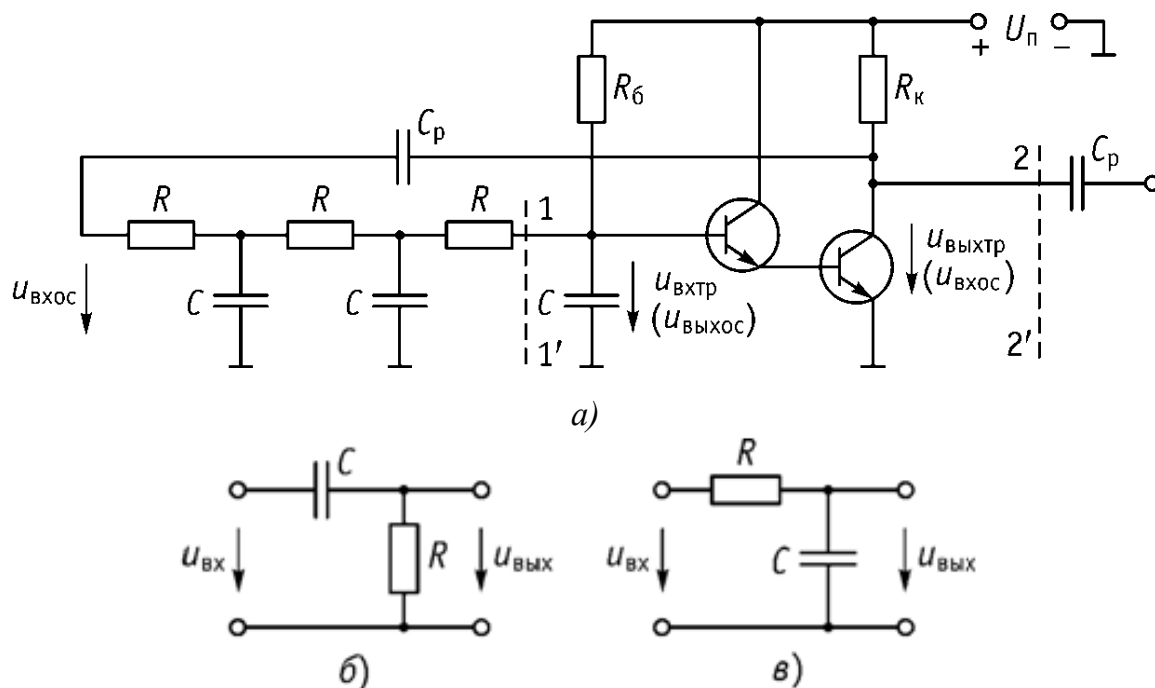


Рис. 15.10

Цель анализа: определить условие самовозбуждения, среднюю крутизну $S_{\text{ср}}^*$, частоту генерации ω_{Γ} , напряжение обратной связи $U_{\text{тос}}^*$ и выходное напряжение $U_{\text{тк}}^*$ в стационарном режиме.

Режим самовозбуждения. Операторный метод анализа
Порядок анализа

1. Представим усилитель на биполярном транзисторе в виде четырехполюсника и развернем схему относительно сечений 1-1' и 2-2' (рис. 15.11).

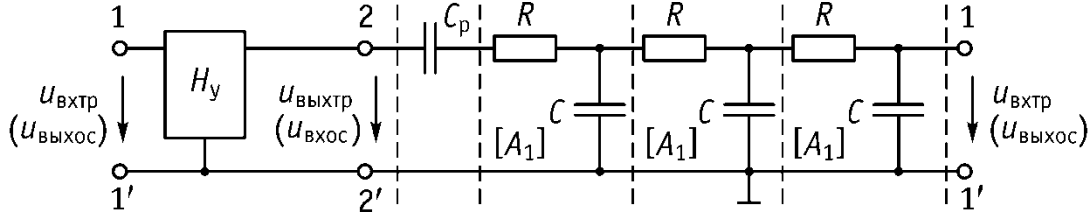


Рис. 15.11

2. Определим передаточную функцию усилителя $H_y(p)$

$$H_y(p) = \frac{U_{\text{выхтр}}(p)}{U_{\text{вхтр}}(p)} = -S \cdot R_k. \quad (15.24)$$

3. Определим передаточную функцию цепи ОС $H_{\text{ос}}(p)$. Для этого:

а) найдем матрицу $[A]$ цепи ОС, которая является произведением матриц $[A_1]$ звеньев RC-цепи.

$$[A] = [A_1] \times [A_1] \times [A_1], \quad (15.25)$$

где

$$[A_1] = \begin{bmatrix} 1 + pRC & R \\ pC & 1 \end{bmatrix}. \quad (15.26)$$

б) поскольку

$$H_{\text{ос}}(p) = \frac{U_{\text{выхос}}(p)}{U_{\text{вхос}}(p)} = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}, \quad (15.27)$$

то (см. уравнение передачи для матрицы A)

$$H_{\text{ос}}(p) = \frac{1}{A_{11}(p) + A_{12}(p) \frac{1}{Z_{\text{вхтр}}(p)}}, \quad (15.28)$$

и необходимо только определить параметры A_{11} и A_{12} матрицы $[A]$ из соотношения $[A] = [A_1] \times [A_1] \times [A_1]$

$$A_{11}(p) = p^3 C^3 R^3 + 5p^2 C^2 R^2 + 6pRC + 1, \quad A_{12}(p) = p^2 C^2 R^3 + 4pCR^2 + 3R, \quad (15.29)$$

тогда

$$H_{\text{ос}}(p) = \frac{1}{p^3 C^3 R^3 + 5p^2 C^2 R^2 + 6pCR + \frac{p^2 C^2 R^3}{R_{\text{вхтр}}} + \frac{4pCR^2}{R_{\text{вхтр}}} + \frac{3R}{R_{\text{вхтр}}} + 1}. \quad (15.30)$$

4. Определяем характеристическое уравнение

$$1 - H_y(p)H_{oc}(p) = 0, \\ p^3 C^3 R^3 + p^2 \left(5C^2 R^2 + \frac{C^2 R^3}{R_{вхтр}} \right) + p \left(6CR + \frac{4CR^2}{R_{вхтр}} \right) + \frac{3R}{R_{вхтр}} + 1 + SR_k = 0. \quad (15.31)$$

5. Определяем условие самовозбуждения, используя критерий Рауса-Гурвица, потребовав, чтобы определитель D был меньше нуля ($D < 0$) (лекция 24).

$$D = \begin{vmatrix} 5C^2 R^2 + \frac{C^2 R^3}{R_{вхтр}} & 1 + SR_k + \frac{3R}{R_{вхтр}} & 0 \\ C^3 R^3 & 6CR + \frac{4CR^2}{R_{вхтр}} & 0 \\ 0 & 5C^2 R^2 + \frac{C^2 R^3}{R_{вхтр}} & 1 + SR_k + \frac{3R}{R_{вхтр}} \end{vmatrix} < 0. \quad (15.32)$$

Раскрыв определитель, находим условие самовозбуждения

$$S \cdot R_k > 29 + 23 \frac{R}{R_{вхтр}} + 4 \frac{R^2}{R_{вхтр}^2}. \quad (15.33)$$

Если $R_{вхтр} \gg R$, тогда $S \cdot R_k > 29$.

Для определения частоты генерации ω_r и значения выходного напряжения необходимо перейти в частотную область.

Стационарный режим работы. Анализ в частотной области

Порядок анализа

1. Определяем передаточную функцию усилителя $H_y(j\omega)$

$$H_y(j\omega) = S \cdot R_k e^{j\pi}. \quad (15.34)$$

2. Определяем передаточную функцию цепи ОС $H_{oc}(j\omega)$

$$H_{oc}(j\omega) = \frac{1}{-j\omega^3 C^3 R^3 - \omega^2 \left(5C^2 R^2 + \frac{C^2 R^3}{R_{вхтр}} \right) + j\omega \left(6CR + \frac{4CR^2}{R_{вхтр}} \right) + 1 + \frac{3R}{R_{вхтр}}}. \quad (15.35)$$

3. Находим петлевое усиление

$$H_p(j\omega) = H_y(j\omega)H_{oc}(j\omega) = |H_p(j\omega)| e^{j\varphi_H(\omega)} = \\ = |H_p(j\omega)| e^{j \left[\pi - \arctg \frac{\omega(6CR + 4CR^2/R_{вхтр}) - \omega^3 C^3 R^3}{1 + 3R/R_{вхтр} - \omega^2(5C^2 R^2 + C^2 R^3/R_{вхтр})} \right]}. \quad (15.36)$$

4. Из условия баланса фаз $\varphi_y(\omega_r) + \varphi_{oc}(\omega_r) = 2\pi k$, $k = 0, 1, \dots$, имеем

$$\pi - \arctg \frac{\omega(6CR + 4CR^2/R_{вхтр}) - \omega^3 C^3 R^3}{1 + 3R/R_{вхтр} - \omega^2(5C^2 R^2 + C^2 R^3/R_{вхтр})} = 0 \text{ (или } 2\pi), \quad (15.37)$$

откуда находим частоту генерации

$$\omega_{\Gamma} = \sqrt{\frac{6CR + 4CR^2/R_{\text{вхтр}}}{C^3 R^3}} = \sqrt{\frac{6 + 4R/R_{\text{вхтр}}}{C^2 R^2}}. \quad (15.38)$$

Если $R_{\text{вхтр}} \gg R$, тогда $\omega_{\Gamma} = \sqrt{6}/(CR)$.

5. Определяем значение средней крутизны

$$S_{\text{ср}}^* = \left(29 + 23 \frac{R}{R_{\text{вхтр}}} + 4 \frac{R^2}{R_{\text{вхтр}}^2} \right) \frac{1}{R_{\text{к}}}. \quad (15.39)$$

Если $R_{\text{вхтр}} \gg R$, тогда $S_{\text{ср}}^* = 29/R_{\text{к}}$.

6. Строим зависимость средней крутизны $S_{\text{ср}}$ от напряжения ОС $U_{\text{мос}}$ (рис. 15.12). Проводим прямую $S_{\text{ср}}^*$, определяем напряжение цепи ОС $U_{\text{мос}}^*$ в стационарном режиме.

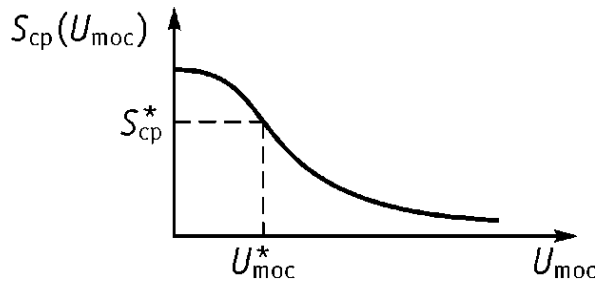


Рис. 15.12

7. Зная напряжение $U_{\text{мос}}^*$, определяем выходное напряжение $U_{\text{тк}}^*$ в стационарном режиме

$$U_{\text{твых}}^* = S_{\text{ср}}^* U_{\text{мос}}^* R_{\text{к}}.$$

RC-генератор с мостом Вина

Схема генератора, выполненная на ОУ (можно на биполярном транзисторе или другом транзисторе), приведена на рис. 15.13 а.

Цель анализа: определить условие самовозбуждения, среднюю крутизну $S_{\text{ср}}^*$, частоту генерации ω_{Γ} , напряжение цепи ОС $U_{\text{мос}}^*$ в стационарном режиме и выходное напряжение $U_{\text{тк}}^*$.

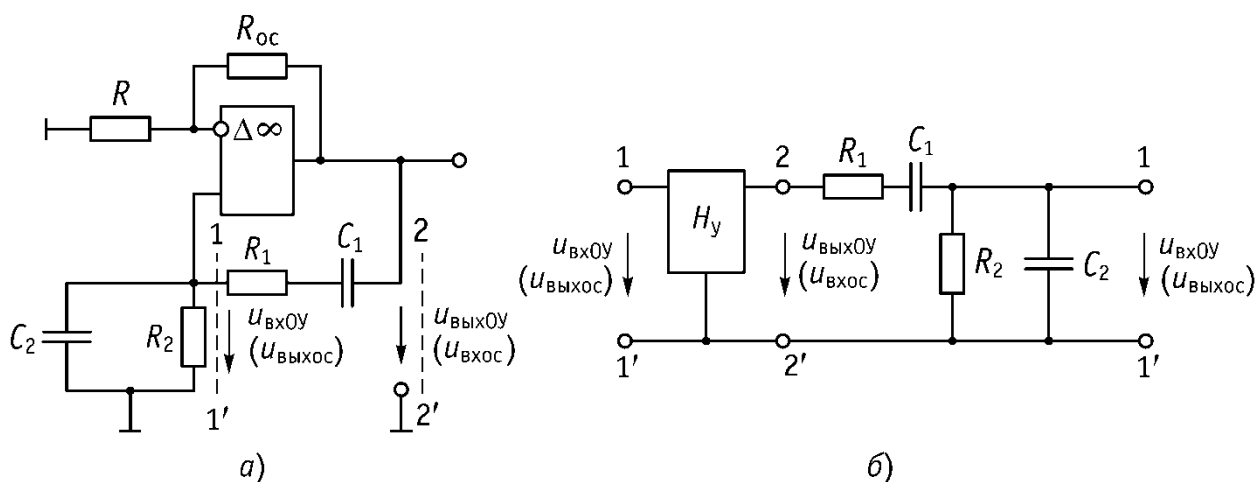


Рис. 15.13

Режим самовозбуждения. Операторный метод анализа

Порядок анализа

1. Представим ОУ в виде четырехполюсника и развернем схему относительно сечения 1-1' и 2-2' (рис. 15.13 б).

2. Определим коэффициент передачи операционного усилителя, учитывая, что $H_u \rightarrow \infty$

$$H_y(p) = \frac{U_{\text{выхОУ}}(p)}{U_{\text{вхОУ}}(p)} = \frac{(1 + R_{\text{oc}}/R)}{1 + \frac{1}{H_u}(1 + R_{\text{oc}}/R)} = 1 + R_{\text{oc}}/R = K. \quad (15.40)$$

3. Определим операторную передаточную функцию цепи ОС

$$H_{\text{oc}}(p) = \frac{U_{\text{выхОС}}(p)}{U_{\text{вхОС}}(p)} = \frac{pR_2C_1}{p^2C_1C_2R_1R_2 + p(R_1C_1 + R_2C_1 + R_2C_2) + 1}. \quad (15.41)$$

4. Определяем характеристическое уравнение и корни уравнения

$$\begin{aligned} 1 - H_y(p)H_{\text{oc}}(p) &= 0, \\ p^2C_1C_2R_1R_2 + p(R_1C_1 + R_2C_1 + R_2C_2 - KR_2C_1) + 1 &= 0, \\ p_{1,2} &= -\alpha_3 \pm \sqrt{\alpha_3^2 - \omega_0^2}, \end{aligned} \quad (15.42)$$

где

$$\alpha_3 = \frac{1}{2} \frac{R_1C_1 + R_2C_1 + R_2C_2 - KR_2C_1}{R_1R_2C_1C_2}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}. \quad (15.43)$$

5. Из условия неустойчивости (реальная часть корня $\text{Re } p > 0$ ($-\alpha > 0$)) определяем условие самовозбуждения

$$K > 1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} \quad (15.44)$$

или

$$K = 1 + \frac{R_{\text{oc}}}{R} > 1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}. \quad (15.45)$$

Стационарный режим. Анализ в частотной области

Порядок анализа

1. Определим петлевое усиление

$$H_p(j\omega) = H_y(j\omega)H_{oc}(j\omega) = |H_p(j\omega)| e^{j\left[\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{R_1C_1 + R_2C_1 + R_2C_2}{1 - \omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2}\right]}. \quad (15.46)$$

2. Из условия баланса фаз $\varphi_p(\omega_r) = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{R_1C_1 + R_2C_1 + R_2C_2}{1 - \omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2} = 2\pi k$, где

$k = 0$, определяем частоту генерации

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}. \quad (15.47)$$

3. Определим коэффициент передачи в стационарном режиме

$$K^* = 1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} \quad (15.48)$$

или

$$K^* = \frac{(1 + R_{oc}/R)}{1 + \frac{1}{H_u^*}(1 + R_{oc}/R)} = 1 + R_1/R_2 + C_2/C_1. \quad (15.49)$$

4. Строим график зависимости коэффициента передачи K от входного напряжения при разомкнутой цепи ОС, проводим прямую коэффициента передачи K^* в стационарном режиме и определяем амплитуду напряжения u_{moc}^* в стационарном режиме.

5. Зная напряжение U_{moc}^* , определяем амплитуду выходного напряжения $U_{mвых}^*$ в стационарном режиме $U_{mвых}^* = U_{moc}^* K^*$.

ТЕМА 16 . Линейные двухполюсники

Лекция 27

Общие сведения, определения, классификация двухполюсников

Двухполюсником называется электрическая цепь, имеющая 2 зажима, через которые она обменивается энергией с другой частью электрической цепи.

Классификация двухполюсников:

- 1) пассивные и активные (автономные и неавтономные); 2) реактивные (LC); 3) общего вида (R, L, C); 4) линейные и нелинейные.

Свойства любого линейного пассивного или неавтономного активного двухполюсника определяется его функцией входного сопротивления $Z(j\omega)$ или функцией входной проводимости $Y(j\omega)$.

Операторные входные функции двухполюсников:

- 1) операторное входное сопротивление $Z(p)$;
- 2) операторная входная проводимость $Y(p)$: $Y(p) = 1/Z(p)$.

Свойства операторной входной функции и условия ее физической реализуемости

В теории [1, 2] доказано, чтобы операторная функция вида

$$F(p) = N(p)/M(p)$$

была бы входной функцией двухполюсника и была бы физически реализуемой необходимо, чтобы она была положительной вещественной функцией (ПВФ).

Определение положительной вещественной функции (ПВФ): это дробно-рациональная функция с вещественными коэффициентами, вещественные части которых положительные при любых комплексных значениях переменной, расположенных в правой полуплоскости.

Замечание. В теории доказано, что любой функции, которая удовлетворяет перечисленным требованиям, может быть сопоставлен физически осуществимый пассивный двухполюсник.

Реактивные двухполюсники

Реактивный двухполюсник – это двухполюсник, содержащий только LC -элементы. Входное сопротивление $Z(p)$ и входная проводимость $Y(p)$ реактивного двухполюсника называются реактансными функциями, они образуют подкласс положительных вещественных функций. Реактансные функции являются нечетными дробно-рациональными функциями комплексной переменной p , которые принимают вещественные значения при вещественных значениях переменной и полюсы которых расположены на мнимой оси; полюсы которых являются простыми и, которые характеризуются положительными вещественными вычетами. Эти условия не только необходимы, но и достаточны, чтобы реактансной функции соответствовал бы физически осуществимый реактивный двухполюсник.

Простейшие (одноэлементные) реактивные двухполюсники

Графики входных сопротивлений и полюсно-нулевые диаграммы простейших реактивных двухполюсников приведены на рис. 16.1 а и б.

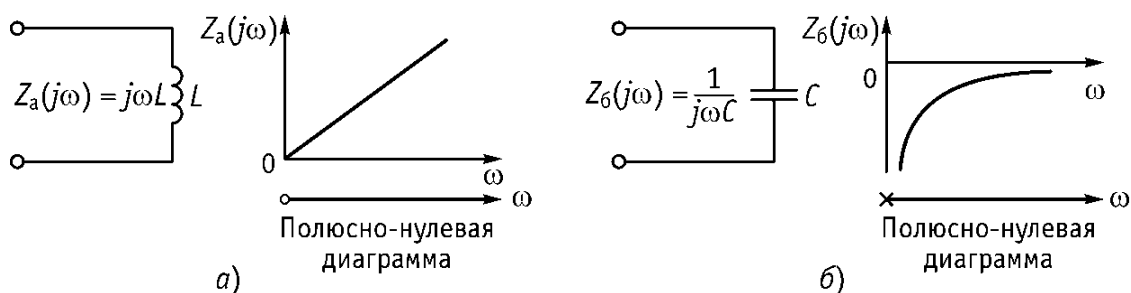


Рис. 16.1

Двухэлементные реактивные двухполюсники

Графики входных сопротивлений и полюсно-нулевые диаграммы двухэлементных реактивных двухполюсников приведены на рис. 16.2 а и б.

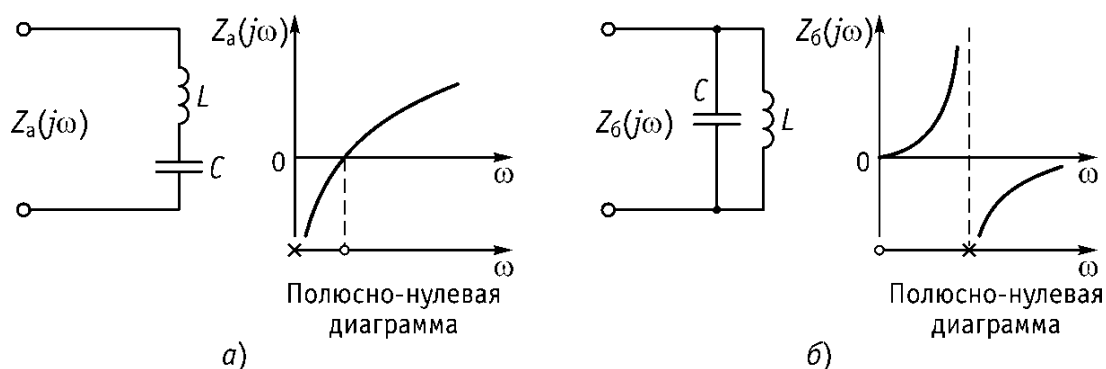


Рис. 16.2

Входное сопротивление двухполюсника, приведенного на рис. 16.2 а

$$Z_a(j\omega) = \frac{L(\omega_1^2 - \omega^2)}{j\omega}, \quad \text{где } \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (16.1)$$

Входное сопротивление двухполюсника, приведенного на рис. 16.2 б

$$Z_б(j\omega) = \frac{j\omega}{C} \cdot \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2}, \quad \text{где } \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (16.2)$$

Трехэлементные реактивные двухполюсники

Схемы трехэлементных реактивных двухполюсников приведены на рис. 16.3 а-г.

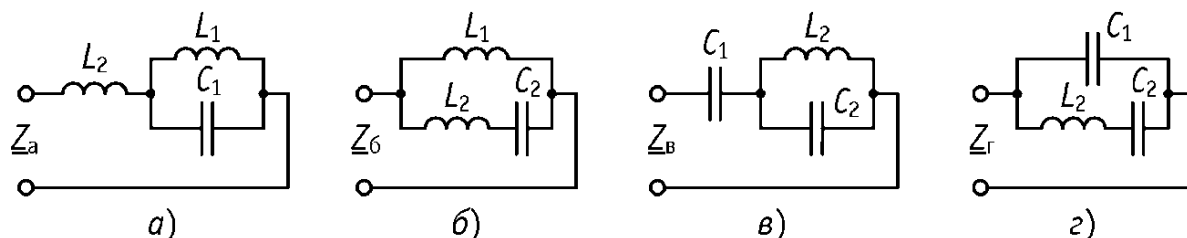


Рис. 16.3

Входное сопротивление двухполюсника, приведенного на рис. 16.3 а, имеет вид

$$Z_a(j\omega) = j\omega L_2 \frac{\omega_2^2 - \omega^2}{\omega_1^2 - \omega^2}, \quad (16.3)$$

где $\omega_1 = 1/\sqrt{L_1 C_1}$ (первым наступает резонанс токов); $\omega_2 = 1/\sqrt{L_1 L_2 C_1 / (L_1 + L_2)}$ (вторым наступает резонанс напряжений).

График входного сопротивления и полюсно-нулевая диаграмма двухполюсника (рис. 16.3 а) приведены на рис. 16.4 а.

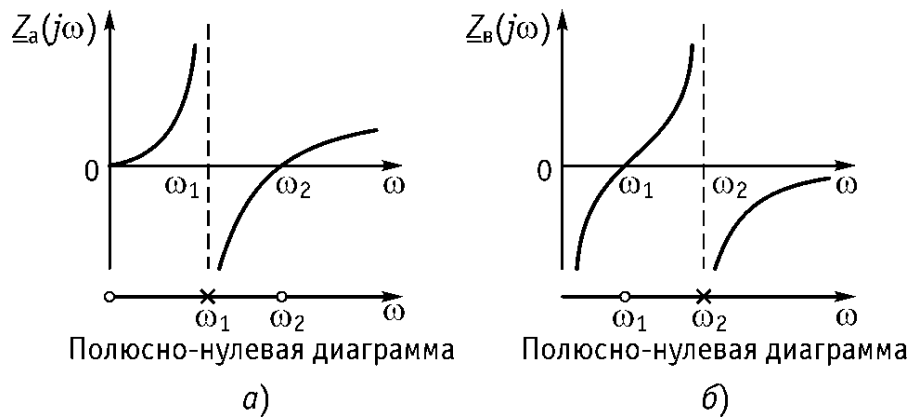


Рис. 16.4

Входное сопротивление двухполюсника, приведенного на рисунке 16.3 в

$$Z_B(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2}, \quad (16.4)$$

где $\omega_1 = 1/\sqrt{L_2(C_1 + C_2)}$ (первым наступает резонанс напряжений); $\omega_2 = 1/\sqrt{L_2 C_2}$ (вторым наступает резонанс токов); $C = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$.

График входного сопротивления и полюсно-нулевая диаграмма двухполюсника (рис. 16.3 в) приведены на рис. 16.4 б.

Замечание 1. Двухполюсники называются эквивалентными, если они имеют одинаковые входные функции.

Замечание 2. Двухполюсники называются обратными, если они удовлетворяют условию

$$Z_A(j\omega) Z_B(j\omega) = R^2, \quad (16.5)$$

где R – некоторое постоянное сопротивление.

Замечание 3. Двухполюсники называются потенциально обратными, если

$$Z_A(j\omega) Z_B(j\omega) = L/C = \rho^2. \quad (16.6)$$

Основные свойства реактивных двухполюсников

1. Входное сопротивление растет с ростом частоты, то есть

$$\frac{dZ_{BX}(j\omega)}{d\omega} > 0. \quad (16.7)$$

2. Количество резонансных частот на единицу меньше количества реактивных элементов

$$n_{рез} = n_{рект} - 1. \quad (16.8)$$

3. Резонансы токов (полюсы $Z_{\text{вх}}(j\omega)$) и резонансы напряжений (нули $Z_{\text{вх}}(j\omega)$) чередуются, причем:
 - а) если $Z_{\text{вх}}(j\omega)|_{\omega=0} = 0$ (есть путь для постоянного тока), то первым наступает резонанс токов;
 - б) если $Z_{\text{вх}}(j\omega)|_{\omega=0} = \infty$ (нет пути постоянному току), то первым наступает резонанс напряжений.
4. В числителе функции $Z_{\text{вх}}(j\omega)$ стоят частоты ω_i – частоты резонансов напряжений, в знаменателе стоят частоты ω_j – частоты резонанса токов.
5. Множитель $j\omega$ стоит в числителе функции $Z_{\text{вх}}(j\omega)$, если первым наступает резонанс токов и стоит в знаменателе, если первым наступает резонанс напряжений.

Замечание. При переходе от операторной входной функции вида

$$Z_{\text{вх}}(p) = \prod_{i=1}^{M/2} (p^2 - p_{0i}^2) / \prod_{j=1}^{N/2} (p^2 - p_j^2), \quad (16.9)$$

где p_{0i} и p_j соответственно нули, и полюсы входной функции $Z(p)$ к комплексной входной функции $Z_{\text{вх}}(j\omega)$ необходимо помнить, что

$$p = j\omega; \quad p^2 = -\omega^2. \quad (16.10)$$

Классы реактивных двухполюсников. В зависимости от того, какое значение принимает входная функция $Z_{\text{вх}}(j\omega)$ при $\omega = 0$ и $\omega = \infty$ различают 4 класса реактивных двухполюсников. Каждый класс реактивных двухполюсников может быть реализован двумя видами канонических форм (схем) Кауэра и двумя видами форм (схем) Фостера.

I класс $(0, \infty)$. $Z(p)_{p=0} = 0, \quad Z(p)_{p=\infty} = \infty$.

Первым наступает резонанс токов, последним будет резонанс напряжений, количество элементов n – нечетное, количество резонансов n_p – четное.

$$n_p = n - 1. \quad (16.11)$$

Зависимость входного сопротивления $Z_{\text{вх}}(j\omega)$ от частоты приведена на рис. 16.5

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = j\omega H \frac{(\omega_2^2 - \omega^2) \dots (\omega_{n-1}^2 - \omega^2)}{(\omega_1^2 - \omega^2) \dots (\omega_{n-2}^2 - \omega^2)}. \quad (16.12)$$

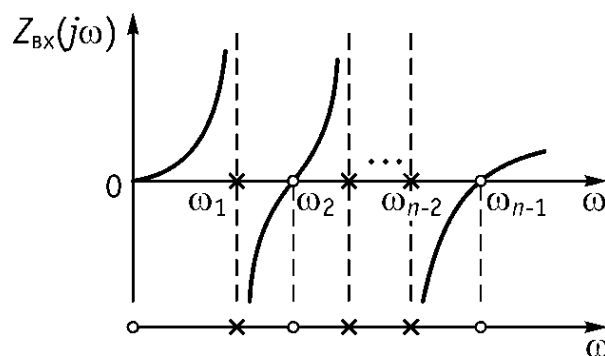


Рис. 16.5

Входное сопротивление реализуется двумя двухполюсниками соответственно по первой и второй формам Фостера (рис.16.6) и двумя двухполюсниками соответственно по первой и второй формам Кауэра (рис. 16.7).

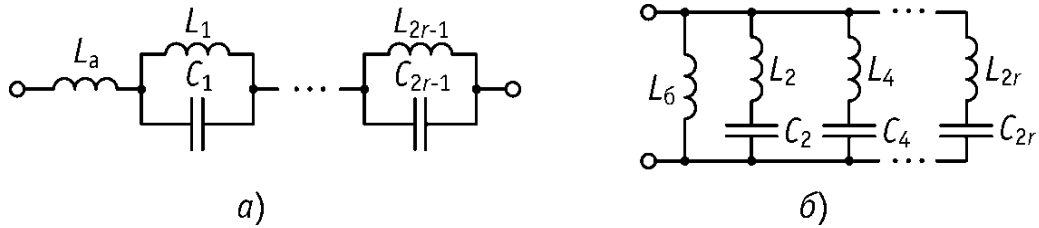


Рис. 16.6

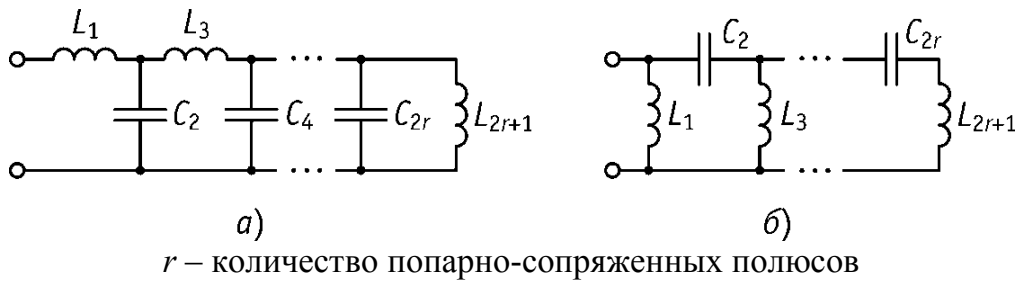


Рис. 16.7

II класс (0, 0). $Z(p)_{p=0}=0$, $Z(p)_{p=\infty}=0$.

Первым наступает резонанс токов, последним будет также резонанс токов, количество элементов n – четное, количество резонансов n_p – нечетное.

Зависимость входного сопротивления $Z_{вх}(j\omega)$ от частоты приведена на рис. 16.8

$$Z_{вх}(j\omega) = j\omega H \frac{(\omega_2^2 - \omega^2) \dots (\omega_{n-2}^2 - \omega^2)}{(\omega_1^2 - \omega^2) \dots (\omega_{n-1}^2 - \omega^2)}. \quad (16.13)$$

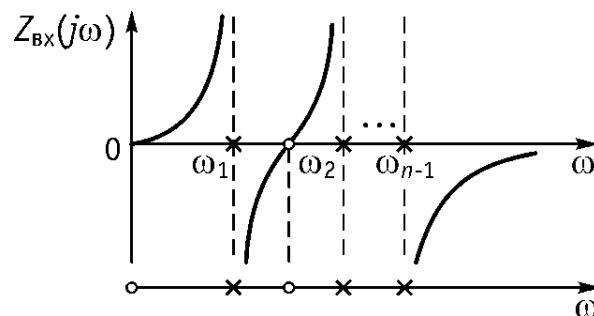


Рис. 16.8

Входное сопротивление реализуется двумя двухполюсниками соответственно по первой и второй формам Фостера (рис. 16.9) и двумя двухполюсниками соответственно по первой и второй формам Кауэра (рис. 16.10).

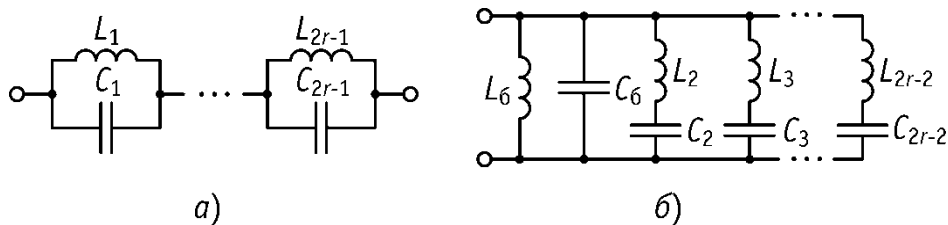


Рис. 16.9

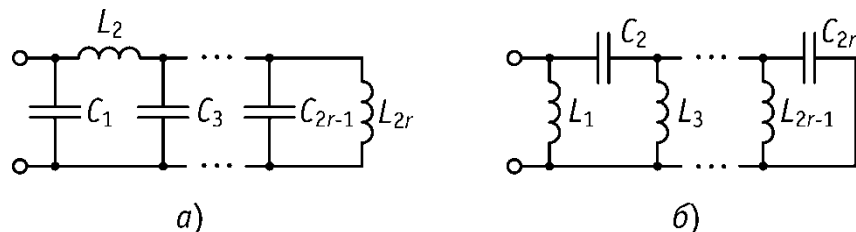


Рис. 16.10

III класс $(\infty, 0)$.

$$Z(p)_{p=0} = \infty, \quad Z(p)_{p=\infty} = 0.$$

Первым наступает резонанс напряжений, последним будет резонанс токов, количество элементов n – нечетное, количество резонансов n_p – четное.

Зависимость входного сопротивления $Z_{\text{вх}}(j\omega)$ от частоты приведена на рис. 16.11

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{H (\omega_1^2 - \omega^2) \dots (\omega_{n-2}^2 - \omega^2)}{j\omega (\omega_2^2 - \omega^2) \dots (\omega_{n-1}^2 - \omega^2)}. \quad (16.14)$$

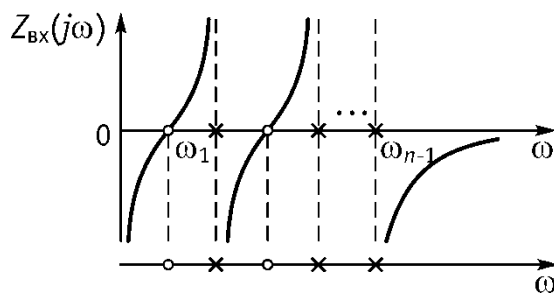


Рис. 16.11

Входное сопротивление реализуется двумя двухполюсниками соответственно по первой и второй формам Фостера (рис. 16.12) и двумя двухполюсниками соответственно по первой и второй формам Кауэра (рис. 16.13).

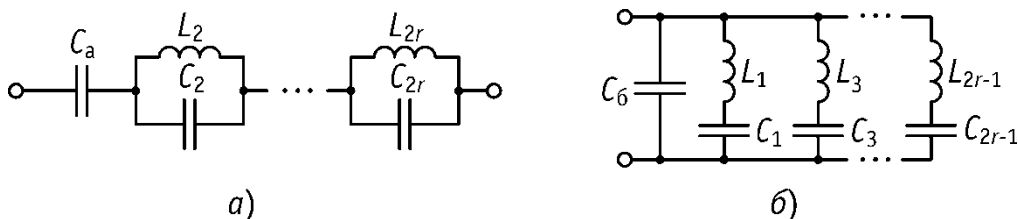


Рис. 16.12

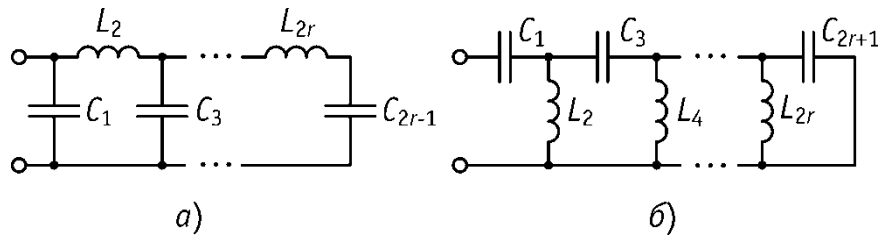


Рис. 16.13

IV класс (∞, ∞) .

$$Z(p)_{p=0} = \infty, \quad Z(p)_{p=\infty} = \infty.$$

Первым наступает резонанс напряжений, последним будет также резонанс напряжений, количество элементов n – четное, количество резонансов n_p – нечетное. Зависимость входного сопротивления $Z_{\text{вх}}(j\omega)$ от частоты приведена на рис. 16.14

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{H (\omega_1^2 - \omega^2) \dots (\omega_{n-1}^2 - \omega^2)}{j\omega (\omega_2^2 - \omega^2) \dots (\omega_{n-2}^2 - \omega^2)}. \quad (16.15)$$

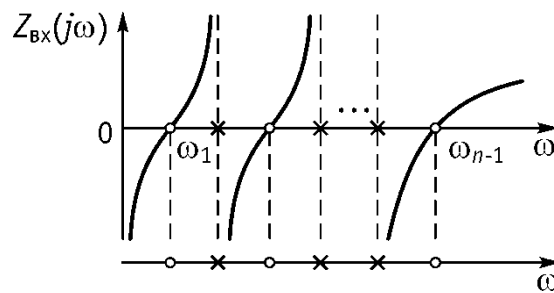


Рис. 16.14

Входное сопротивление реализуется двумя двухполюсниками соответственно по первой и второй формам Фостера (рис. 16.15) и двумя двухполюсниками соответственно по первой и второй формам Кауэра (рис. 16.16).

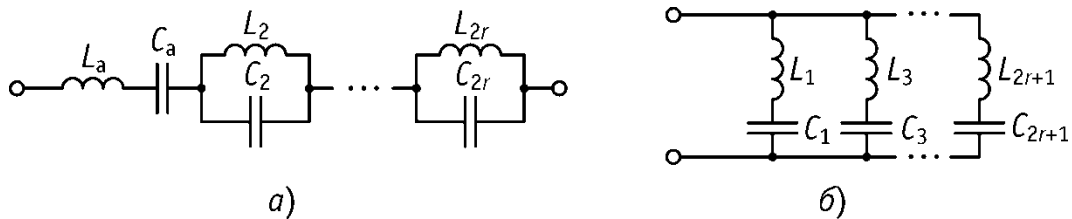


Рис. 16.15

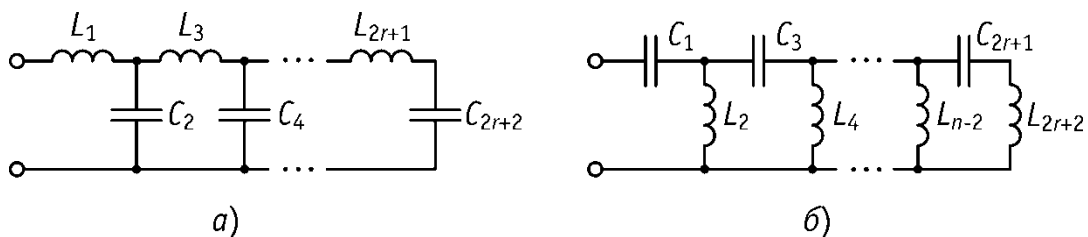


Рис. 16.16

Замечание. Первая схема Фостера – последовательное соединение параллельных контуров (в контуре может отсутствовать один элемент, либо индуктивность, либо емкость. Количество контуров с одним элементом не более двух). Вторая схема Фостера – параллельное соединение последовательных контуров (в контуре может отсутствовать один элемент, либо индуктивность, либо емкость. Количество контуров с одним элементом не более двух). Первая схема Кауэра – последовательное (лестничное) соединение LC -цепочек, в которых индуктивности располагаются в продольных, емкости в поперечных ветвях схемы (в первой LC -цепочке может отсутствовать индуктивность, в последней LC -цепочке может отсутствовать емкость, при этом в общем случае количество LC -цепочек с одним элементом не более двух). Вторая схема Кауэра – последовательное (лестничное) соединение LC -цепочек, в которых индуктивности располагаются в поперечных, а емкости в продольных ветвях схемы (в первой LC -цепочке может отсутствовать емкость, в последней LC -цепочке может отсутствовать индуктивность, при этом в общем случае количество LC -цепочек с одним элементом не более двух).

Лекция 28

Синтез реактивных двухполюсников по входным функциям

Синтез состоит из двух этапов:

На первом этапе входная функция разлагается на простые функции. На втором этапе – по простым функциям определяют элементы схемы и их параметры.

Реализация реактивного двухполюсника по методу Фостера

I. Реализация по первой, наиболее общей, форме (схеме) Фостера (рис. 16.17 а)

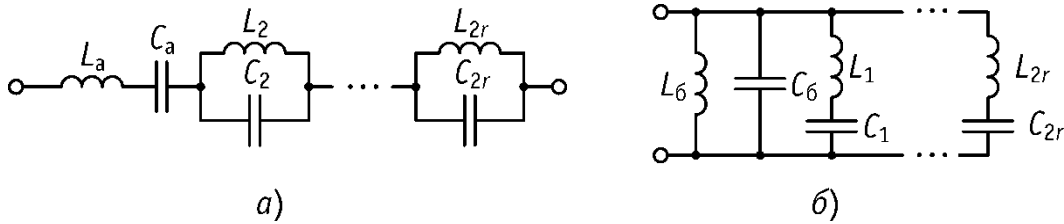


Рис. 16.17

1. Входная функция (функция сопротивления) $Z(p)$ разлагается на простые функции в виде суммы дробей

$$Z(p) = A_{\infty}p + \frac{A_0}{p} + \sum_{k=1}^r \frac{A_{2k}p}{p^2 + \omega_{2k}^2}, \quad (16.16)$$

где A_0 , A_{∞} , A_{2k} – вычеты функции $Z(p)$, равные

$$\begin{aligned} A_{\infty} &= L_a = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Z(p)}{p}; \\ A_0 &= C_a^{-1} = \lim_{p \rightarrow 0} pZ(p); \\ A_{2k} &= C_{2k}^{-1} = \lim_{p^2 \rightarrow -\omega_{2k}^2} \frac{p^2 + \omega_{2k}^2}{p} Z(p), \end{aligned} \quad (16.17)$$

r – количество пар сопряженных полюсов.

Зная C_{2k}^{-1} , находим индуктивность

$$L_{2k} = \frac{1}{\omega_{2k}^2 C_{2k}^{-1}}. \quad (16.18)$$

2. Зная L_{2k} , C_{2k} , L_a , C_a , составляем схему.

Замечание 1. Первое слагаемое $A_{\infty}p$ будет, когда входная функция $Z(p)$ – неправильная дробь. Слагаемое вида A_0/p будет, если степень полинома знаменателя входной функции $Z(p)$ нечетная.

Замечание 2. Если $A_0 = 0$ и $A_{\infty} = 0$, или $A_0 = 0$, тогда вместо индекса $2k$ необходимо написать $(2k - 1)$.

II. Реализация по второй форме (схеме) Фостера (рис. 16.17 б)

1. Входная функция (функция проводимости) $Y(p)$ разлагается на простые функции в виде суммы дробей

$$Y(p) = A_{\infty}p + \frac{A_0}{p} + \sum_{k=1}^r \frac{A_{2k}p}{p^2 + \omega_{2k}^2}, \quad (16.19)$$

где A_0, A_{∞}, A_{2k} – вычеты функции $Y(p)$, равные

$$\begin{aligned} A_{\infty} &= C_6 = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Y(p)}{p}; \\ A_0 &= L_6^{-1} = \lim_{p \rightarrow 0} pY(p); \\ A_{2k} &= L_{2k}^{-1} = \lim_{p^2 \rightarrow -\omega_{2k}^2} \frac{p^2 + \omega_{2k}^2}{p} Y(p); \\ C_{2k} &= \frac{1}{\omega_{2k}^2 L_{2k}}. \end{aligned} \quad (16.20)$$

2. Зная L_{2k}, C_{2k}, L_6, C_6 , составляем схему.

Замечание. Первое слагаемое $A_{\infty}p$ будет, когда входная функция $Y(p)$ – неправильная дробь. Слагаемое вида A_0/p будет, если степень полинома знаменателя входной функции $Y(p)$ имеет нечетную степень.

Реализация реактивных двухполюсников по методу Кауэра

I. Реализация по первой форме (схеме) Кауэра

В основу реализации положена входная функция: либо входное сопротивление $Z(p)$, либо входная проводимость $Y(p)$. Вид 1-й схемы Кауэра будет зависеть от того, какое значение приобретает входная функция при $p = \infty$.

А. Если $Z(p)|_{p=\infty} = \infty$ или $Y(p)|_{p=\infty} = 0$ (если задана функция $Y(p)$, и она равна нулю при $p=0$, то ее переводят в $Z(p)$: $Z(p) = 1/Y(p)$), тогда разлагают функцию $Z(p)$ в дробь вида

$$Z(p) = Z_1(p) + \frac{1}{Y_2(p) + \frac{1}{Z_3(p) + \frac{1}{Y_4(p) + \dots}}}, \quad (16.21)$$

где $Z_1(p) = pL_1$; $Y_2(p) = pC_2$; $Z_3(p) = pL_3$; $Y_4(p) = pC_4$.

Алгоритм деления

1. Полиномы располагают по убывающим степеням p .

2. Первое деление: числитель функции $Z(p)$ – делимое; знаменатель функции – делитель.

Результат: $Z_1(p)$ + 1-й остаток.

3. Второе деление: делимое – знаменатель функции $Z(p)$; делитель – 1-й остаток 1-го деления.

Результат: $Y_2(p)$ + 2-й остаток.

4. Третье деление: делимое – 1-й остаток 1-го деления; делитель – 2-й остаток 2-го деления.

Результат: $Z_3(p)$ + 3-й остаток и т.д.

5. Коэффициенты при p в результатах $Z_1(p)$, $Y_2(p)$, $Z_3(p)$ – значения элементов в схеме.

Пример. Пусть задана входная функция $Z(p)$ вида

$$Z(p) = \frac{2 \cdot 10^{-3} p^3 + 3 \cdot 10^7 p}{p^2 + 5 \cdot 10^9}.$$

Так как при $p = \infty$, $Z(p) = \infty$, тогда разлагаем функцию $Z(p)$ в дробь.

Первое деление $\frac{2 \cdot 10^{-3} p^3 + 3 \cdot 10^7 p}{p^2 + 5 \cdot 10^9}$

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 10^{-3} p^3 + 3 \cdot 10^7 p \\ - 2 \cdot 10^{-3} p^3 + 10^7 p \\ \hline 2 \cdot 10^7 p \end{array} \left| \frac{p^2 + 5 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^{-3} p} = Z_1(p) = pL_1 \rightarrow L_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} \right.$$

$2 \cdot 10^7 p$ – первый остаток.

Второе деление

$$\begin{array}{r} p^2 + 5 \cdot 10^9 \\ - p^2 \\ \hline 5 \cdot 10^9 \end{array} \left| \frac{2 \cdot 10^7 p}{0,5 \cdot 10^{-7} p} = Y_2(p) = pC_2 \rightarrow C_2 = 0,5 \cdot 10^{-7} \text{ Ф} \right.$$

$5 \cdot 10^9$ – второй остаток.

Третье деление

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 10^7 p \\ - 2 \cdot 10^7 p \\ \hline 0 \end{array} \left| \frac{5 \cdot 10^9}{0,4 \cdot 10^{-2} p} = Z_3(p) = pL_3 \rightarrow L_3 = 0,4 \cdot 10^{-2} \text{ Гн} \right.$$

0 – третий остаток.

Первая схема Кауэра представлена на рис. 16.18 а.

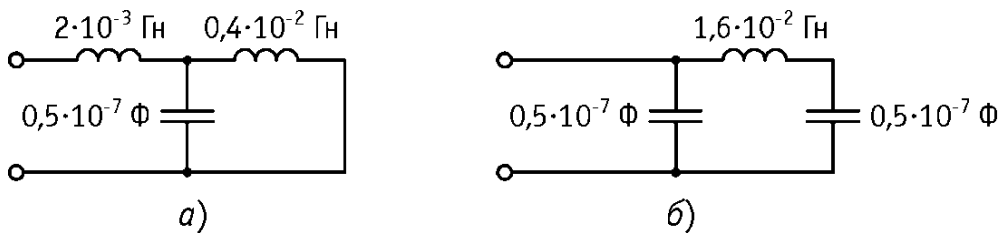


Рис. 16.18

Б. Если $Z(p)|_{p=\infty} = 0$ или $Y(p)|_{p=\infty} = \infty$ (если задана функция $Z(p)$, и она равна нулю при $p=\infty$, то ее переводят в $Y(p) = 1/Z(p)$), тогда разлагают функцию $Y(p)$ в дробь вида

$$Y(p) = Y_1(p) + \frac{1}{Z_2(p) + \frac{1}{Y_3(p) + \frac{1}{Z_4(p) + \dots}}},$$

где $Y_1(p) = pC_1$; $Z_2(p) = pL_2$; $Y_3(p) = pC_3$; $Z_4(p) = pL_4$.

Алгоритм деления такой же, как в пункте 1а).

Пример. Пусть задана входная функция $Z(p)$ вида

$Z(p) = \frac{2 \cdot 10^7 p^2 + 2,5 \cdot 10^{16}}{p^3 + 2,5 \cdot 10^9 p}$, так как при $p = \infty$, $Z(p) = 0$, тогда $Z(p)$ переводится в $Y(p)$ и функция $Y(p)$ разлагается в дробь

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{p^3 + 2,5 \cdot 10^9 p}{2 \cdot 10^7 p^2 + 2,5 \cdot 10^{16}}.$$

Первое деление

$$\begin{array}{r} p^3 + 2,5 \cdot 10^9 p \overline{) 2 \cdot 10^7 p^2 + 2,5 \cdot 10^{16}} \\ \underline{p^3 + 1,25 \cdot 10^9 p} \\ 0,5 \cdot 10^{-7} p \end{array} = Y_1(p) = pC_1 \rightarrow C_1 = 0,5 \cdot 10^{-7} \text{ Ф}$$

$1,25 \cdot 10^9 p$ – первый остаток.

Второе деление

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 10^7 p^2 + 2,5 \cdot 10^{16} \overline{) 1,25 \cdot 10^9 p} \\ \underline{2 \cdot 10^7 p^2} \\ 2,5 \cdot 10^{16} \end{array} \begin{array}{l} 1,25 \cdot 10^9 p \\ \underline{1,6 \cdot 10^{-2} p} \\ 1,6 \cdot 10^{-2} p \end{array} = Z_2(p) = pL_2 \rightarrow L_2 = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ Гн}$$

$2,5 \cdot 10^{16}$ – первый остаток.

Третье деление

$$\begin{array}{r} 1,25 \cdot 10^9 p \overline{) 2,5 \cdot 10^{16}} \\ \underline{1,25 \cdot 10^9 p} \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} 2,5 \cdot 10^{16} \\ \underline{0,5 \cdot 10^{-7} p} \\ 0,5 \cdot 10^{-7} p \end{array} = Y_3(p) = pC_3 \rightarrow C_3 = 0,5 \cdot 10^{-7} \text{ Ф}$$

0 – первый остаток.

Схема представлена на рис. 16.18 б.

II. Реализация реактивных двухполюсников по 2-й форме (схеме) Кауэра

В основу положена входная функция ($Z(p)$, $Y(p)$).

Вид 2-й схемы Кауэра будет зависеть от того, какое значение приобретает входная функция при $p = 0$.

А. Если $Z(p)|_{p=0} = \infty$ или $Y(p)|_{p=0} = 0$ (если задана функция $Y(p)$, и она равна нулю при $p=0$, то ее переводят в $Z(p) = 1/Y(p)$), тогда разлагают функцию $Z(p)$ в дробь вида

$$Z(p) = Z_1(p) + \frac{1}{Y_2(p) + \frac{1}{Z_3(p) + \frac{1}{Y_4(p) + \dots}}}, \quad (16.22)$$

где $Z_1(p) = \frac{1}{pC_1}$; $Y_2(p) = \frac{1}{pL_2}$; $Z_3(p) = \frac{1}{pC_3}$; $Y_4(p) = \frac{1}{pL_4}$.

Алгоритм деления

1. Полиномы располагают по возрастанию степеней p .
2. Первое деление: числитель функции $Z(p)$ – делимое; знаменатель функции – делитель.

Результат: $Z_1(p) + 1$ -й остаток.

3. Второе деление: делимое – знаменатель функции $Z(p)$; делитель – 1-й остаток 1-го деления.

Результат: $Y_2(p) + 2$ -й остаток.

4. Третье деление: делимое – 1-й остаток 1-го деления; делитель – 2-й остаток 2-го деления.

Результат: $Z_3(p) + 3$ -й остаток и т.д.

6. Коэффициенты при p в результатах $Z_1(p)$, $Y_2(p)$, $Z_3(p)$ – значения элементов в схеме.

Пример. Пусть задана входная функция $Z(p)$ вида

$$Z(p) = \frac{2 \cdot 10^7 p^2 + 2,5 \cdot 10^{16}}{p^3 + 2,5 \cdot 10^9 p}.$$

Так как при $p=0$, $Z(p) = \infty$, тогда разлагаем функцию $Z(p)$ в дробь.

Первое деление

$$\begin{array}{l} - \frac{2,5 \cdot 10^{16} + 2 \cdot 10^7 p^2}{2,5 \cdot 10^{16} + 10^7 p^2} \left| \frac{2,5 \cdot 10^9 p + p^3}{10^7 \frac{1}{p}} = \frac{1}{p C_1} \rightarrow C_1 = 10^{-7} \text{ Ф} \right. \\ 10^7 p^2 - \text{первый остаток.} \end{array}$$

Второе деление

$$\begin{array}{l} - \frac{2,5 \cdot 10^9 p + p^3}{2,5 \cdot 10^9 p} \left| \frac{10^7 p^2}{2,5 \cdot 10^2 \frac{1}{p}} = \frac{1}{p L_2} \rightarrow L_2 = 0,4 \cdot 10^{-2} \text{ Гн} \right. \\ p^3 - \text{второй остаток.} \end{array}$$

Третье деление

$$\begin{array}{l} - \frac{10^7 p^2}{10^7 p^2} \left| \frac{p^3}{10^7 \frac{1}{p}} = \frac{1}{p C_3} \rightarrow C_3 = 10^{-7} \text{ Ф} \right. \\ 0 - \text{третий остаток.} \end{array}$$

Вторая схема Кауэра представлена на рис. 16.19 а.

Б. Если $Z(p)|_{p=0} = 0$ или $Y(p)|_{p=0} = \infty$ (если задана функция $Z(p)$, и она равна нулю при $p=0$, то ее переводят в $Y(p) = 1/Z(p)$), тогда разлагают функцию $Y(p)$ в дробь вида

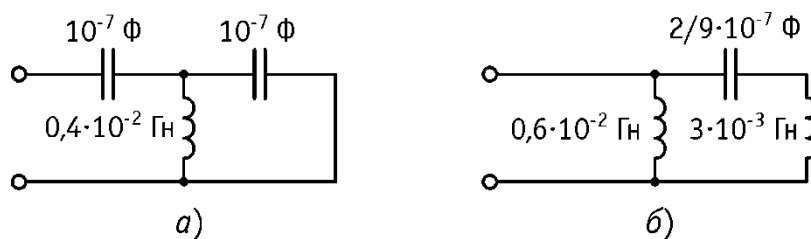


Рис. 16.19

$$Y(p) = Y_1(p) + \frac{1}{Z_2(p) + \frac{1}{Y_3(p) + \dots}}, \quad (16.23)$$

где $Y_1(p) = \frac{1}{pL_1}$; $Z_2(p) = \frac{1}{pC_2}$; $Y_3(p) = \frac{1}{pL_3}$.

Алгоритм деления такой же, как в пункте Па).

Пример. Пусть задана входная функция вида

$$Z(p) = \frac{2 \cdot 10^{-3} p^3 + 3 \cdot 10^7 p}{p^2 + 5 \cdot 10^9},$$

так как при $p = 0$, $Z(p) = 0$, тогда $Z(p)$ переводится в $Y(p)$ и функция $Y(p)$ разлагается в дробь

$$Y(p) = \frac{p^2 + 5 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^{-3} p^3 + 3 \cdot 10^7 p}.$$

Первое деление

$$\begin{array}{r} 5 \cdot 10^9 + p^2 \\ - 5 \cdot 10^9 + \frac{1}{3} p^2 \end{array} \left| \begin{array}{r} 3 \cdot 10^7 p + 2 \cdot 10^{-3} p^3 \\ \frac{5}{3} 10^2 \frac{1}{p} \end{array} \right. = \frac{1}{pL_1} \rightarrow L_1 = \frac{3}{5} 10^{-2} \text{ Гн}$$

$\frac{2}{3} p^2$ – первый остаток.

Второе деление

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 10^7 p + 2 \cdot 10^{-3} p^3 \\ - 3 \cdot 10^7 p \end{array} \left| \begin{array}{r} \frac{2}{3} p^2 \\ 4,5 \cdot 10^7 \frac{1}{p} \end{array} \right. = \frac{1}{pC_2} \rightarrow C_2 = \frac{2}{9} 10^{-7} \text{ Ф}$$

$2 \cdot 10^{-3} p^3$ – второй остаток.

Третье деление

$$\begin{array}{r} \frac{2}{3} p^2 \\ - \frac{2}{3} p^2 \end{array} \left| \begin{array}{r} 2 \cdot 10^{-3} p^3 \\ \frac{1}{3} \cdot 10^3 \frac{1}{p} \end{array} \right. = \frac{1}{pL_3} \rightarrow L_3 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$$

0 – третий остаток.

Схема представлена на рис. 16.19 б.

ТЕМА 17. Электрические фильтры

Лекция 29

Классификация фильтров. Краткое описание характеристик фильтра. Основные этапы синтеза фильтров. Условия физической реализуемости квадрата модуля передаточной функции

Электрический фильтр – это четырехполюсник, пропускающий без ослабления или с малым ослаблением колебания одних частот и непропускающий (или пропускающий с большим ослаблением) колебания других частот.

Полоса пропускания – диапазон частот, в котором ослабление фильтра мало и не превышает некоторого допустимого (заданного) значения $A_{\max}$.

Полоса непропускания – диапазон частот, в котором ослабление фильтра велико и не меньше некоторого допустимого (заданного) значения $A_{\min}$.

Классификация электрических фильтров

1. По расположению полос пропускания и непропускания фильтры подразделяются на:

- а) фильтры нижних частот (ФНЧ);
- б) фильтры верхних частот (ФВЧ);
- в) полосовой фильтр (ПФ);
- г) режекторный (заграждающий) фильтр (РФ).

2. По форме частотных характеристик фильтры подразделяются на:

- а) фильтры с характеристикой Баттерворта;
- б) фильтры с характеристикой Чебышева и инверсной характеристикой Чебышева;
- в) фильтры с характеристикой Золотарева;
- г) фильтры с характеристикой Бесселя.

3. По виду применяемых элементов фильтры подразделяются на:

- а) пассивные LC -фильтры;
- б) активные RC -фильтры;
- в) пьезоэлектрические и магнитострикционные фильтры;
- г) фильтры на отрезках линий передач;
- д) электромеханические фильтры;
- е) цифровые фильтры.

Краткое описание фильтров

1. Фильтр нижних частот (ФНЧ) – фильтр, у которого полоса пропускания расположена в диапазоне частот $(0, \omega_{\text{п}})$, а полоса непропускания – в диапазоне частот $(\omega_{\text{з}}, \infty)$, переходная область – в диапазоне частот $(\omega_{\text{п}}, \omega_{\text{з}})$. Обозначение в схеме показано на рис. 17.1.



Рис. 17.1

Амплитудно-частотная характеристика $|H(j\omega)|$ и ослабление $A_p = -10\lg(1/|H(j\omega)|^2)$ фильтра с характеристикой Баттерворта приведены на рис. 17.2.

Амплитудно-частотная характеристика $|H(j\omega)|$ и ослабление A_p фильтра с характеристикой Чебышева приведены на рис. 17.3.

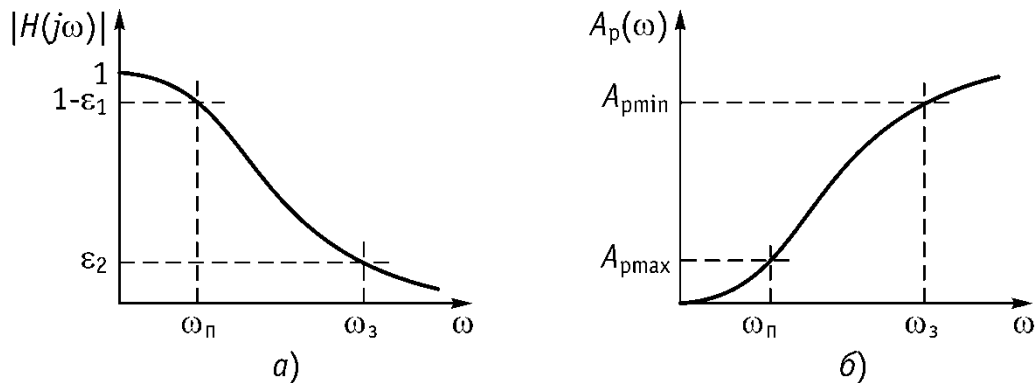


Рис. 17.2

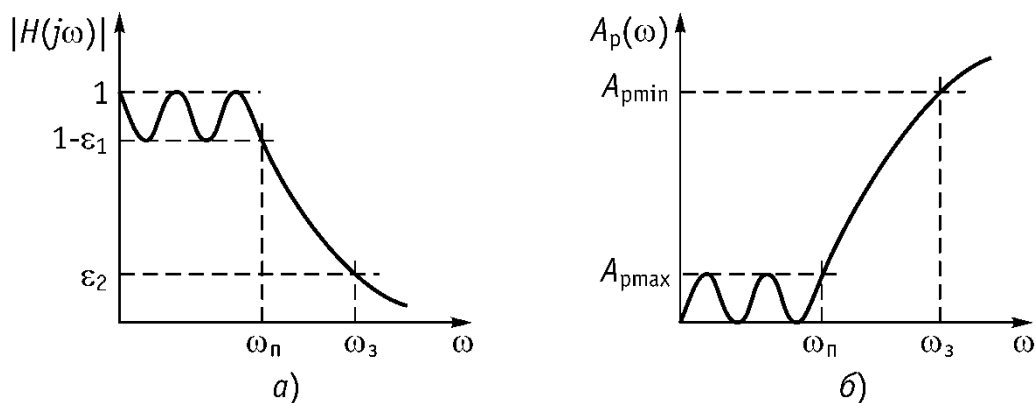


Рис 17.3

2. Фильтр верхних частот (ФВЧ) – фильтр, у которого полоса пропускания расположена в диапазоне частот $(\omega_{\text{п}}, \infty)$, а полоса непропускания – в диапазоне частот $(0, \omega_{\text{з}})$, переходная область – в диапазоне частот $(\omega_{\text{з}}, \omega_{\text{п}})$. Обозначение в схеме показано на рис. 17.4.

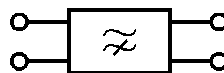


Рис. 17.4

Амплитудно-частотная характеристика $|H(j\omega)|$ и ослабление A_p фильтра ФВЧ с характеристикой Баттерворта приведены на рис. 17.5.

Амплитудно-частотная характеристика $|H(j\omega)|$ и ослабление A_p фильтра ФВЧ с характеристикой Чебышева приведены на рис. 17.6.

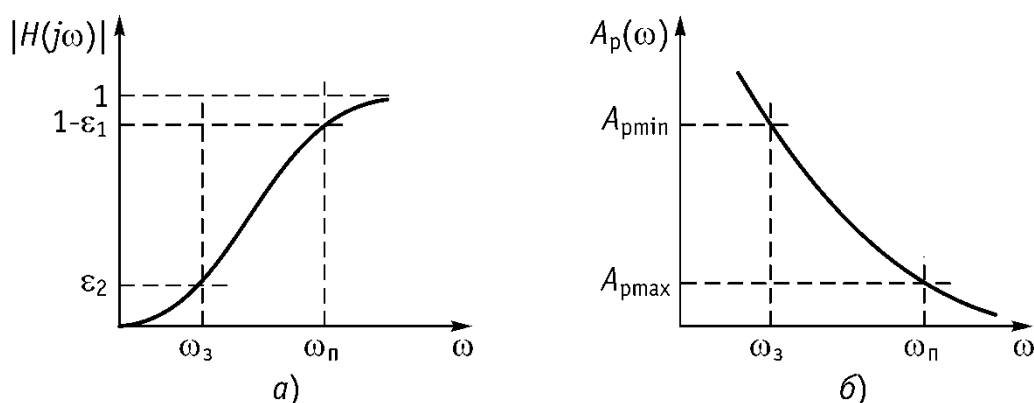


Рис. 17.5

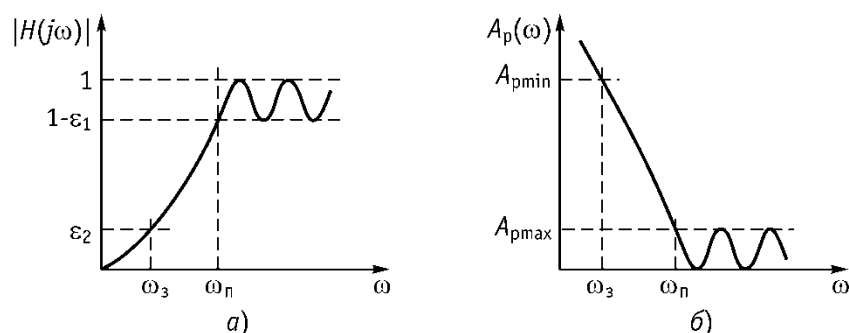


Рис. 17.6

3. Полосовой фильтр (ПФ) – фильтр, у которого полоса пропускания расположена в диапазоне частот $(\omega_{п1}, \omega_{п2})$, а полосы непропускания расположены в диапазонах частот $(0, \omega_{з1})$ и $(\omega_{з2}, \infty)$, переходная область расположена в диапазонах частот $(\omega_{з1}, \omega_{п1})$ и $(\omega_{п2}, \omega_{з2})$. Обозначение в схеме показано на рис. 17.7.

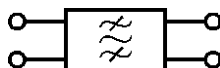


Рис. 17.7

Амплитудно-частотная характеристика $|H(j\omega)|$ и ослабление A_p фильтра с характеристикой Баттерворта приведены на рис. 17.8.

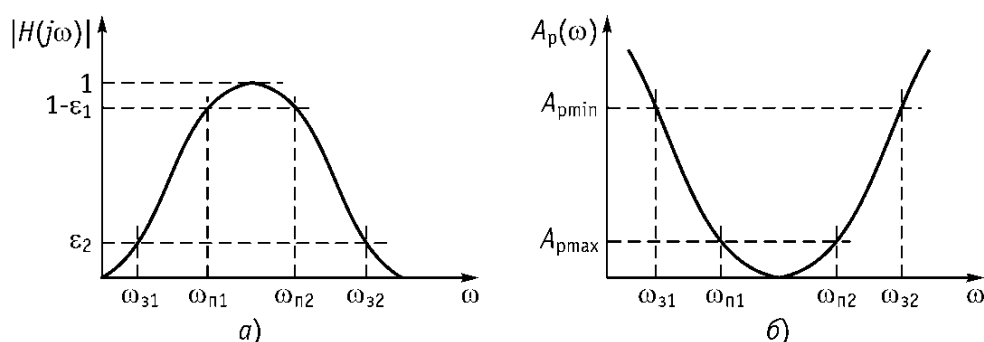


Рис. 17.8

Амплитудно-частотные характеристики $|H(j\omega)|$ и ослабление A_p фильтра с характеристикой Чебышева приведены на рис. 17.9.

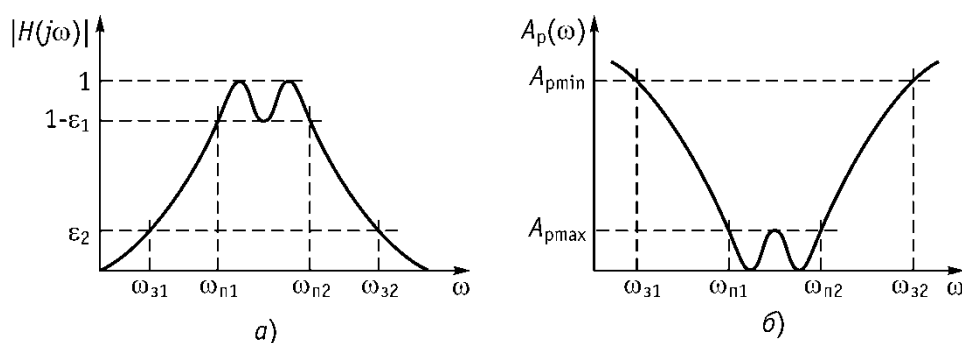


Рис. 17.9

4. Режекторный фильтр (РФ) – фильтр, у которого полосы пропускания расположены в диапазонах частот $(0, \omega_{п1})$ и $(\omega_{п2}, \infty)$, а полоса непропускания расположена в диапазоне частот $(\omega_{з1}, \omega_{з2})$, переходная область расположена в диапазонах частот $(\omega_{п1}, \omega_{з1})$ и $(\omega_{з2}, \omega_{п2})$. Обозначение в схеме показано на рис. 17.10.

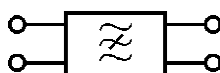


Рис. 17.10

Амплитудно-частотная характеристика $|H(j\omega)|$ и ослабление A_p фильтра с характеристикой Баттерворта приведены на рис. 17.11.

Амплитудно-частотная характеристика $|H(j\omega)|$ и ослабление A_p фильтра с характеристикой Чебышева приведены на рис. 17.12.

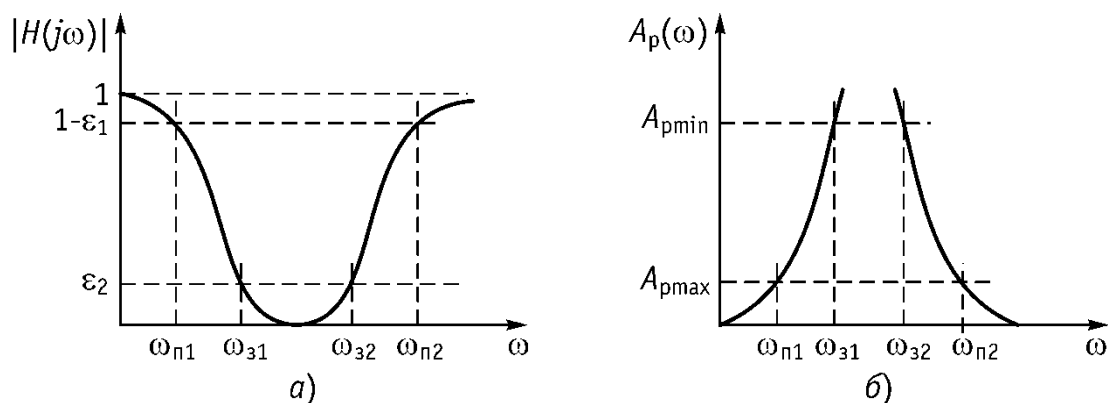


Рис. 17.11

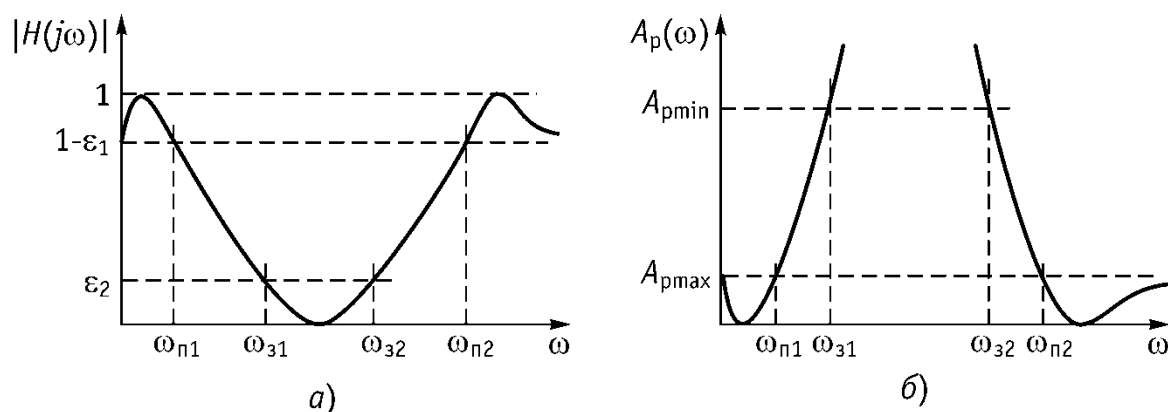


Рис. 17.12

Основные этапы синтеза фильтра нижних частот.

Условия физической реализуемости передаточной функции фильтра

В классической постановке задача синтеза фильтра разбивается на 2 этапа:

На первом этапе решается задача аппроксимации, в результате решения задачи аппроксимации определяется передаточная функция $H(p)$ фильтра (или комплексная передаточная функция $H(j\omega)$).

На втором этапе решается задача реализации фильтра, а именно: по найденной передаточной функции $H(p)$ определяется структура фильтра, элементы фильтра и их параметры.

Решение задачи аппроксимации состоит в поиске такой функции, которая, с одной стороны, воспроизводила бы АЧХ фильтра с заданной точностью, а с другой стороны, была бы физически реализуема.

Условия физической реализуемости передаточной функции фильтра

Чтобы передаточная функция $H(p) = W(p)/V(p)$ была физически реализуемой необходимо чтобы:

- 1) полином $V(p)$ знаменателя передаточной функции $H(p)$ был полиномом Гурвица;
- 2) степень n полинома $W(p)$ числителя была бы не больше степени m полинома $V(p)$ знаменателя передаточной функции $H(p)$.

В терминах нулей и полюсов эти 2 условия формулируются следующим образом:

- а) полюсы функции $H(p)$ должны находиться в левой полуплоскости комплексной плоскости P (условие устойчивости);
- б) должны отсутствовать полюсы на мнимой оси, в нуле и на бесконечности.

Замечание 1. На положение нулей операторной функции $H(p)$ ограничения не накладываются, если не накладываются требования на ФЧХ фильтра. Заметим, если хотя бы один нуль функции $H(p)$ находится в правой полуплоскости комплексной плоскости P , то такая цепь называется **цепью неминимально фазового типа** (отсутствует связь между ФЧХ и АЧХ и такие цепи используются при разработке фазовых корректоров). Если все нули функции, находятся в левой полуплоскости, то такая цепь называется **цепью минимально фазового типа** (имеется связь между АЧХ и ФЧХ).

Замечание 2. Если требования к фильтру заданы на АЧХ (а это так в большинстве случаев), то задача аппроксимации разбивается на 2 задачи:

- 1) сначала решается задача аппроксимации квадрата АЧХ фильтра, в результате определяется квадрат модуля комплексной передаточной функции $|H(j\omega)|^2$ фильтра;
- 2) затем решается задача поиска операторной передаточной функции $H(p)$ (по найденному квадрату АЧХ).

Условия физической реализуемости квадрата модуля КПФ $|H(j\omega)|^2$

Эти условия следуют из условий физической реализуемости операторной передаточной функции $H(p)$, которые состоят в следующем:

1. Функция $|H(j\omega)|^2$ должна быть четной, дробно-рациональной функцией переменной ω .

2. Степень полинома числителя квадрата модуля АЧХ не превышает степени полинома знаменателя ($n \leq m$).
3. Полиномы числителя и знаменателя функции $|H(j\omega)|^2$ не отрицательны на вещественной полуоси.

Свойства квадрата модуля КПФ $|H(j\omega)|^2$

1. $|H(j\omega)|^2$ является отношением четных полиномов.
2. Нули и полюсы имеют квадратную симметрию в P плоскости
 $|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H(-j\omega)$,
 или, заменяя $j\omega$ на p , имеем $|H(p)|^2 = H(p)H(-p)$.
3. В общем случае полиномы числителя и знаменателя $|H(j\omega)|^2$ имеют три типа сомножителей
 1. $p^4 + ap^2 + a_0$
 2. $p^2 - a$ ($a > 0$)
 3. $p^2 + a$ ($a > 0$).

(17.1)

1-й и 2-й типы имеют квадратную симметрию, а 3-й тип будет иметь квадратную симметрию, если он будет иметь вид

$$(p^2 + a)^2, (p^2 + a)^4 \text{ и т.д.} \quad (17.2)$$

Исходя из свойств и условий физической реализуемости функции $|H(j\omega)|^2$, можно заметить, что функция $|H(j\omega)|^2$ будет квадратом АЧХ фильтра, если:

- 1) функция $|H(j\omega)|^2$ есть отношение четных полиномов;
- 2) любые полюсы или нули на оси $j\omega$ функции $|H(p)|^2$ имеют четный порядок.

Из сказанного можно сделать 2 замечания.

Замечание 1. Если известна операторная передаточная функция фильтра $H(p)$, то заменой $p \rightarrow j\omega$ можно найти функцию $|H(j\omega)|^2$.

Замечание 2. Если известен (или найден в результате решения задачи аппроксимации) квадрат модуля КПФ $|H(j\omega)|^2$, то определить операторную передаточную функцию $H(p)$ можно, следуя следующему алгоритму:

- 1) в выражении $|H(j\omega)|^2$ заменяем $\omega \rightarrow -jp$, получаем $|H(p)|^2$;
- 2) определяем нули и полюсы функции $|H(p)|^2$;
- 3) представляем квадрат модуля $|H(p)|^2$ в виде произведения передаточных функций $|H(p)|^2 = H(p) \cdot H(-p)$;
- 4) все полюсы функции $|H(p)|^2$ в левой полуплоскости комплексной плоскости P относим к $H(p)$, а все полюсы в правой полуплоскости относим к $H(-p)$;
- 5) распределение нулей функции $|H(p)|^2$ произведем следующим образом:
 - а) если на ФЧХ фильтра никаких ограничений не накладывается, то обычно для $H(p)$ выбирают нули, лежащие в левой полуплоскости,
 - б) если на ФЧХ фильтра накладываются требования, то к выбору нулей предъявляются определенные требования;
- 6) постоянный множитель H_0 функции $H(p)$ можно найти, представив функцию $H(p)$ в виде

$$H(p) = H_0 \prod_{i=1}^N (p - p_{0i}) / \prod_{j=1}^M (p - p_j), \quad (17.3)$$

где p_{0i} и p_j — соответственно нули и полюса функции $H(p)$.

Лекция 30

Решение задачи аппроксимации квадрата АЧХ фильтра (поиск функции $|H(j\omega)|^2$)

В сущности, решение задачи аппроксимации квадрата АЧХ фильтра сводится к определению вида функции $|H(j\omega)|^2$ из класса дробно-рациональных функций общего вида

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{P_1^2(\omega) + P_2^2(\omega)}{Q_1^2(\omega) + Q_2^2(\omega)} \quad (17.4)$$

по заданным требованиям на АЧХ фильтра.

Решение этой задачи зависит от критерия приближения аппроксимирующей функции $|H(j\omega)|^2$ к аппроксимируемой функции, то есть к заданному квадрату АЧХ фильтра.

Мы рассмотрим лишь только решение задачи аппроксимации по приближению по Тейлору и по критерию приближения Чебышева.

Замечание 1. При аппроксимации по Тейлору определяем функцию $|H(j\omega)|$, которая максимально плоско (гладко) аппроксимирует заданную АЧХ. Фильтры при этом называются *полиномиальными фильтрами с характеристикой Баттерворта*.

При аппроксимации по критерию Чебышева получаем функцию $|H(j\omega)|$, которая аппроксимирует заданную АЧХ фильтра равноволновой характеристикой в полосе пропускания и максимально-плоской характеристикой в полосе непропускания. Фильтры при этом называются *полиномиальными фильтрами с характеристикой Чебышева*.

Решение задачи аппроксимации квадрата АЧХ фильтра по приближению Тейлора

Постановка задачи: пусть задан квадрат АЧХ фильтра $|H_3(j\omega)|^2$ (на примере фильтра нижних частот (рис. 17.13)). Требуется найти из класса четных дробно-рациональных функций вида

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{P_1^2(\omega) + P_2^2(\omega)}{Q_1^2(\omega) + Q_2^2(\omega)} = H_0^2 \frac{1 + c_1\omega^2 + c_2\omega^4 + \dots + c_{n-1}\omega^{2n-2} + c_n\omega^{2n}}{1 + d_1\omega^2 + d_2\omega^4 + \dots + d_{m-1}\omega^{2m-2} + d_m\omega^{2m}} \quad (17.5)$$

такую, которая бы с заданной точностью (наилучшим образом в смысле приближения по Тейлору) описывала бы заданный квадрат АЧХ (т.е. заданную функцию $|H_3(j\omega)|^2$).

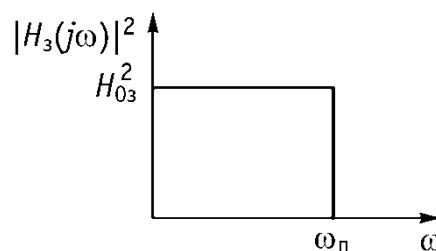


Рис. 17.13

$$|H_3(j\omega)|^2 = \begin{cases} H_{03}^2, & \text{при } 0 \leq \omega < \omega_{\Pi} \\ 0, & \text{при } \omega_{\Pi} \leq \omega < \infty. \end{cases} \quad (17.6)$$

Порядок решения задачи аппроксимации

Замечание. Поскольку четная дробно-рациональная функция $|H(j\omega)|^2$ непрерывна, то она не может описать скачок функции $|H_3(j\omega)|^2$ на частоте ω_{Π} , но она может, как угодно близко аппроксимировать его.

1. Накладываем на функцию $|H(j\omega)|^2$ условия:

- а) $|H(j\omega)|^2 = H_0^2$ на частоте $\omega = 0$;
- б) $|H(j\omega)|^2 = 0$ на частоте $\omega = \infty$, получаем

$$|H(j\omega)|^2 = H_0^2 \frac{1 + c_1\omega^2 + c_2\omega^4 + \dots + c_{m-1}\omega^{2m-2}}{1 + d_1\omega^2 + d_2\omega^4 + \dots + d_{m-1}\omega^{2m-2} + d_m\omega^{2m}}. \quad (17.7)$$

2. Разделим полином числителя функции $|H(j\omega)|^2$ на полином знаменателя и представим функцию $|H(j\omega)|^2$ в виде

$$|H(j\omega)|^2 = H_0^2 [1 + (c_1 - d_1)\omega^2 + (c_2 - d_2 + c_1^2 - d_1c_1)\omega^4 + \dots]. \quad (17.8)$$

3. Запишем формально ряд Тейлора некоторой функции относительно частоты $\omega_0 = 0$

$$F(\omega) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}\omega + \frac{F''(0)}{2!}\omega^2 + \frac{F'''(0)}{3!}\omega^3 + \dots + \frac{F^n(0)}{n!}\omega^n. \quad (17.9)$$

4. Сравним ряд Тейлора $F(\omega)$ и функцию $|H(j\omega)|^2$. Из сравнения видно, что квадрат АЧХ есть ряд Тейлора, у которого в силу четности функции $|H(j\omega)|^2$ все производные нечетного порядка равны нулю.

5. Из требования, что квадрат АЧХ является максимально плоской функцией в полосе пропускания и максимально плоской (гладкой) в полосе непропускания, следует, что как можно больше производных должны быть равны нулю на частотах $\omega = 0$ и $\omega = \infty$.

В теории доказано, что максимальное количество производных равно $(2m - 1)$. Из требования равенства нулю $(2m - 1)$ производных следует

$$\begin{aligned} c_1 - d_1 = 0 & \rightarrow c_1 = d_1 \\ c_2 - d_2 + c_1^2 - d_1c_1 = 0 & \rightarrow c_2 = d_2 \\ \dots & \rightarrow c_{m-1} = d_{m-1}. \end{aligned} \quad (17.10)$$

6. Чтобы обеспечить спад характеристики в области верхних частот ($\omega > \omega_{\Pi}$), необходимо располагать нули функции $|H(j\omega)|^2$ в бесконечности, а это значит, что коэффициенты числителя $c_1, c_2, c_3, \dots$ должны быть равны нулю, при этом функция $|H(j\omega)|^2$ принимает вид

$$|H(j\omega)|^2 = H_0^2 \frac{1}{1 + d_m\omega^{2m}}. \quad (17.11)$$

Обозначим $d_m = \varepsilon^2$, получим

$$|H(j\omega)|^2 = H_0^2 \frac{1}{1 + \varepsilon^2\omega^{2m}}. \quad (17.12)$$

Фильтр с такой функцией **называется полиномиальным фильтром с характеристикой Баттерворта.**

7. Значение ε выбирается из требования к АЧХ в полосе пропускания фильтра.

Величина ε регулирует скорость убывания амплитуды частотной характеристики. Ее называют коэффициентом неравномерности ослабления в полосе пропускания.

8. Поскольку расчет фильтра производят, как правило, для нормированных частот (а потом переходят от нормированных частот к заданным), то представим квадрат АЧХ для нормированной частоты $\Omega = \omega / \omega_{\Pi}$

$$|H(j\Omega)|^2 = H_0^2 \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \Omega^{2m}} = H_0^2 \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \psi^2(\Omega)}, \quad (17.13)$$

где $\psi^2(\Omega)$ – функция фильтрации. В общем случае функция $\psi(\Omega)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} 1) & -1 \leq \psi(\Omega) \leq 1, \text{ при } 0 \leq \Omega \leq \Omega_{\Pi}; \\ 2) & \psi(\Omega) \gg 1, \text{ при } \Omega > \Omega_3, \end{aligned} \quad (17.14)$$

где

$$\Omega_{\Pi} = \frac{\omega_{\Pi}}{\omega_{\Pi}} = 1; \quad \Omega_3 = \frac{\omega_3}{\omega_{\Pi}} > 1.$$

9. Определяем ослабление A_p фильтра (при этом полагаем, что $H_0 = 1$)

$$\begin{aligned} A_p &= \ln \frac{1}{|H(j\Omega)|} = \frac{1}{2} \ln(1 + \varepsilon^2 \psi^2(\Omega)), \text{ Нп} \\ \text{или } A_p &= 20 \lg \frac{1}{|H(j\Omega)|} = 10 \lg(1 + \varepsilon^2 \psi^2(\Omega)), \text{ дБ.} \end{aligned} \quad (17.15)$$

10. **Определяем передаточную функции $H(p)$ по найденному квадрату модуля комплексной передаточной функции $|H(j\Omega)|^2$.**

а. Подставим в функцию квадрата модуля функции $|H(j\Omega)|^2$ вместо $j\Omega$ переменную p ($j\Omega = p$)

$$|H(j\Omega)|_{j\Omega=p}^2 = |H(p)|^2 = H_0^2 \frac{1}{1 + \varepsilon^2 (-jp)^{2m}} = H_0^2 \frac{1}{\varepsilon^2 \left((-jp)^{2m} + \frac{1}{\varepsilon^2} \right)}. \quad (17.16)$$

б. Определяем полюсы функции $|H(p)|^2$. Для этого приравняем полином знаменателя к нулю и найдем корни полинома

$$(-jp)^{2m} + \frac{1}{\varepsilon^2} = 0, \quad (-jp)^{2m} = -\frac{1}{\varepsilon^2}, \quad -jp = (-1)^{1/(2m)} (1/\varepsilon^2)^{1/(2m)} = (-1)^{1/(2m)} \sqrt[m]{1/\varepsilon} \quad (17.17)$$

откуда учитывая, что $-1 = e^{j\pi(2k-1)}$, $k = 1, 2, \dots, 2m$, имеем

$$p_k = \frac{j}{\sqrt[m]{\varepsilon}} e^{j \frac{\pi(2k-1)}{2m}}, \quad k = 1, 2, \dots, 2m, \quad (17.18)$$

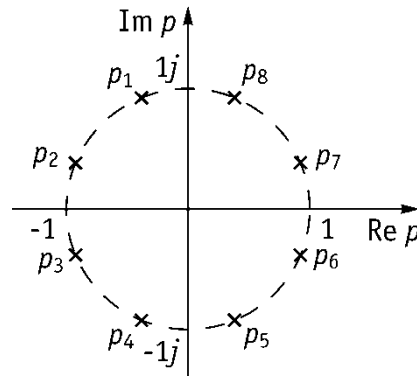


Рис. 17.14

или
$$p_k = \frac{1}{\sqrt[m]{\varepsilon}} \left(-\sin\left(\frac{2k-1}{2m}\pi\right) + j \cos\left(\frac{2k-1}{2m}\pi\right) \right), \quad k=1, 2, \dots, 2m. \quad (17.19)$$

Например, если $2m = 8$, тогда полюсы равны (рис. 17.14)

$$\begin{aligned} k=1 \quad p_1 &= \left(j \cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8} \right) \frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon}}, & k=2 \quad p_2 &= \left(j \cos \frac{3}{8}\pi - \sin \frac{3}{8}\pi \right) \frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon}}, \\ k=3 \quad p_3 &= \left(j \cos \frac{5}{8}\pi - \sin \frac{5}{8}\pi \right) \frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon}}, & k=4 \quad p_4 &= \left(j \cos \frac{7}{8}\pi - \sin \frac{7}{8}\pi \right) \frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon}}, \\ k=5 \quad p_5 &= \left(j \cos \frac{9}{8}\pi - \sin \frac{9}{8}\pi \right) \frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon}}, & k=6 \quad p_6 &= \left(j \cos \frac{11}{8}\pi - \sin \frac{11}{8}\pi \right) \frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon}}, \\ k=7 \quad p_7 &= \left(j \cos \frac{13}{8}\pi - \sin \frac{13}{8}\pi \right) \frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon}}, & k=8 \quad p_8 &= \left(j \cos \frac{15}{8}\pi - \sin \frac{15}{8}\pi \right) \frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Если коэффициент неравномерности ослабления ε равен единице, то найденные полюсы располагаются на единичной окружности (рис. 17.14).

в. Представляем функцию $|H(p)|^2$ в виде:

$$|H(p)|^2 = H(p) \cdot H(-p), \quad (17.20)$$

выбираем полюсы, лежащие в левой полуплоскости комплексной плоскости p (p_1, p_2, p_3, p_4), и представляем нормированную передаточную функцию $H(p)$ следующим образом

$$H(p) = \frac{1/\varepsilon}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4)}. \quad (17.21)$$

г. Поскольку полюсы попарно комплексно-сопряженные (в нашем случае $p_1 = \bar{p}_4, p_2 = \bar{p}_3$), тогда функцию $H(p)$ можно представить

$$H(p) = \frac{1/\varepsilon}{\left(p^2 + \frac{2}{\sqrt[4]{\varepsilon}} p \sin \frac{\pi}{8} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \left(p^2 + \frac{2}{\sqrt[4]{\varepsilon}} p \sin \frac{3}{8}\pi + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right)} \quad (17.22)$$

или в общем случае

$$H(p) = \frac{1/\varepsilon}{\left(p^2 + \frac{2}{\sqrt[m]{\varepsilon}} p \sin \frac{\pi}{2m} + \frac{1}{\sqrt[m]{\varepsilon^2}} \right) \dots \left(p^2 + \frac{2}{\sqrt[m]{\varepsilon}} p \sin \frac{\pi(m-1)}{2m} + \frac{1}{\sqrt[m]{\varepsilon^2}} \right)}. \quad (17.23)$$

$$\text{Если: } m=1, p+\frac{1}{\varepsilon}; \quad m=2, p^2+\frac{1.41}{\sqrt{\varepsilon}}p+\frac{1}{\varepsilon}, \dots, \\ m=6, \left(p^2+\frac{0.5176}{\sqrt[6]{\varepsilon}}p+\frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}} \right) \left(p^2+\frac{1.4142}{\sqrt[6]{\varepsilon}}p+\frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}} \right) \left(p^2+\frac{1.9319}{\sqrt[6]{\varepsilon}}p+\frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}} \right) -$$

полиномы Баттерворта.

Расчет ФНЧ с характеристикой Баттерворта

Постановка задачи. Дано: полоса пропускания – $(0, \omega_{\Pi})$, полоса непропускания – (ω_3, ∞) , ослабление $A_{p \max}$ в полосе пропускания, ослабление $A_{p \min}$ в полосе непропускания. Необходимо рассчитать фильтр нижних частот.

Порядок расчета

1. Нормируем текущую частоту ω относительно частоты ω_{Π} полосы пропускания $\Omega = \omega/\omega_{\Pi}$ и определяем нормированные частоты полос пропускания и непропускания $\Omega_{\Pi} = 1, \quad \Omega_3 = \omega_3/\omega_{\Pi}$.

2. Определяем коэффициент неравномерности ослабления ε в полосе пропускания, исходя из уравнения

$$A_p = \frac{1}{2} \ln(1 + \varepsilon^2 \Omega^{2m}) \Big|_{\Omega=\Omega_{\Pi}=1} = A_{p \max} \quad (\text{НП}), \\ \varepsilon = \sqrt{e^{2A_{p \max}} - 1} \quad \left(\text{или } \varepsilon = \sqrt{10^{0.1A_{p \max}} - 1}, \text{ если ослабление в дБ} \right).$$

3. Определяем порядок m фильтра из уравнения

$$A_p = \frac{1}{2} \ln(1 + \varepsilon^2 \Omega^{2m}) \Big|_{\Omega=\Omega_3} = A_{p \min} \quad (\text{НП}) \\ m \geq \frac{\ln \left[\frac{e^{2A_{p \min}} - 1}{\varepsilon^2} \right]}{2 \ln \Omega_3} \left(\text{или } m \geq \frac{\lg \left[\frac{10^{0.1A_{p \min}} - 1}{\varepsilon^2} \right]}{2 \lg \Omega_3}, \text{ если ослабление в дБ} \right).$$

4. Зная m , определяем квадрат модуля передаточной функции $|H(p)|^2$

$$|H(p)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 (-jp)^{2m}}.$$

5. Определяем полюсы функции $|H(p)|^2$ из уравнения $1 + \varepsilon^2 (-jp)^{2m} = 0$.

$$p_k = \frac{1}{\sqrt[m]{\varepsilon}} \left(-\sin \left(\frac{2k-1}{2m} \pi \right) + j \cos \left(\frac{2k-1}{2m} \pi \right) \right).$$

6. Выбираем полюсы, расположенные в левой полуплоскости, и определяем нормированную функцию $H(p)$

$$H(p) = \frac{1/\varepsilon}{(p-p_1) \dots (p-p_m)}.$$

7. Зная операторную передаточную функцию $H(p)$, определяем комплексную передаточную функцию $H(j\omega)$ фильтра

$$H(p) \Big|_{p=j\omega} = H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi_H(\omega)}.$$

Решение задачи аппроксимации квадрата АЧХ фильтра нижних частот по критерию Чебышева

Постановка задачи: пусть задан квадрат АЧХ фильтра нижних частот (рис. 17.13). Требуется найти из класса четных дробно-рациональных функций $|H(j\omega)|^2$

$$|H(j\omega)|^2 = H_0^2 \frac{1 + c_1\omega^2 + \dots + c_n\omega^{2n}}{1 + d_1\omega^2 + \dots + d_m\omega^{2m}} \quad (17.24)$$

такую аппроксимирующую функцию, которая бы описывала заданный квадрат АЧХ с необходимой точностью по критерию Чебышева. При этом допускается, что аппроксимирующая функция может принимать в полосе пропускания несколько раз минимальные и максимальные значения (рис. 17.15).

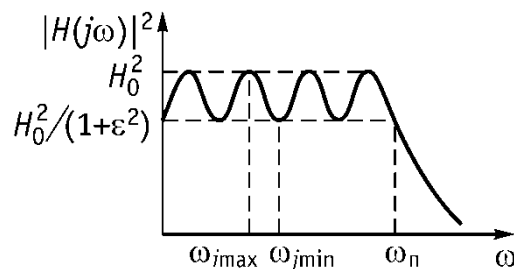


Рис. 17.15

Порядок решения

1. Так как квадрат модуля комплексной передаточной функции $|H(j\omega)|^2$ должен спадать при $\omega > \omega_n$, то нули функции должны находиться на ∞ , а это значит, что все коэффициенты полинома числителя равны нулю, кроме первого, тогда

$$|H(j\omega)|^2 = H_0^2 \frac{1}{1 + d_1\omega^2 + \dots + d_m\omega^{2m}} = H_0^2 \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_m^2(\omega)}, \quad (17.25)$$

где $T_m(\omega)$ – некоторая функция, которую необходимо найти.

2. Поскольку допускается, что квадрат модуля функции $|H(j\omega)|^2$ может принимать в полосе пропускания $0 \dots \omega_n$ несколько раз минимальные и максимальные значения (рисунок 17.15), тогда, так как производные функции $|H(j\omega)|^2$ на частотах $\omega_{i\max}$ и $\omega_{j\min}$ равны нулю, можно записать, что

$$\left. \frac{dT_m(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega_{i\max}}^{\omega_{j\min}} = 0, \text{ кроме точки } \omega = \omega_n. \text{ В теории [9, 11] показано, что из этого}$$

условия можно получить дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dT_m(\omega)}{d\omega} = C_m \frac{\sqrt{1 - T_m^2(\omega)}}{\sqrt{1 - \omega^2}}, \quad (17.26)$$

которое можно решить, разделяя переменные и переходя к нормированным частотам, следующим образом

$$\int \frac{dT_m(\Omega)}{\sqrt{1-T_m^2(\Omega)}} = C_m \int \frac{d\Omega}{\sqrt{1-\Omega^2}}. \quad (17.27)$$

Откуда $\arccos T_m(\Omega) = C_m \arccos \Omega$ и $T_m(\Omega) = \cos[C_m \arccos \Omega]$.

Коэффициент C_m выбираем таким, чтобы функция $T_m(\omega)$ была полиномом степени m . Доказано, что коэффициент C_m должен быть равен m ($C_m = m$), в этом случае функция $T_m(\Omega)$ принимает вид

$$T_m(\Omega) = \cos[m \arccos \Omega], \quad (17.28)$$

где $T_m(\Omega)$ – полиномы Чебышева первого рода порядка m .

Свойства полинома Чебышева

1. Нули полинома $T_m(\Omega)$ определяются из уравнения

$$\Omega_i = \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m}, \quad i=1\dots m. \quad (17.29)$$

2. Количество нулей равно m .

3. Полином имеет $(m+1)$ максимальных (+1) и минимальных (-1) значений в диапазоне частот $-1 \leq \Omega \leq 1$.

4. При $\Omega > 1$ (или $\Omega < -1$) значение полинома Чебышева намного больше 1 $T_m(\Omega) \gg 1$, при этом полиномы Чебышева имеют вид $T_m(\Omega) = \text{ch}[m \text{Arch } \Omega]$.

Для разных значений m функция $T_m(\Omega)$ имеет вид

$$\begin{aligned} m=0 \quad T_0(\Omega) &= 1, & m=1 \quad T_1(\Omega) &= \Omega, \\ m=2 \quad T_2(\Omega) &= 2\Omega^2 - 1, & m=3 \quad T_3(\Omega) &= 4\Omega^3 - 3\Omega. \end{aligned}$$

Рекуррентная формула для определения полинома Чебышева

$$T_{m+1}(\Omega) = 2\Omega \cdot T_m(\Omega) - T_{m-1}(\Omega).$$

Например, для $m=4$ $T_4(\Omega) = 2\Omega T_3(\Omega) - T_2(\Omega) = 8\Omega^4 - 8\Omega^2 + 1$.

На рис. 17.16 приведены графики функции $T_m(\Omega)$ для значений $m=0, 1, 2, 3$.

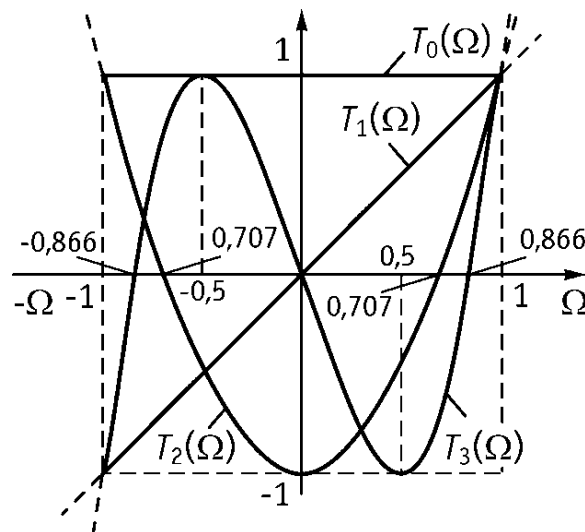


Рис. 17.16

Лекция 31

Определение передаточной функции $H(p)$ фильтра нижних частот с характеристикой Чебышева по найденному квадрату модуля АЧХ $|H(j\Omega)|^2$

1. Зная функцию $|H(j\Omega)|^2$, определяем $|H(p)|^2$

$$|H(j\Omega)|^2 \Big|_{j\Omega=p} = |H(p)|^2 = \frac{H_0^2}{1 + \varepsilon^2 T_m^2\left(\frac{p}{j}\right)} = \frac{H_0^2}{\varepsilon^2 \left(\frac{1}{\varepsilon^2} + T_m^2\left(\frac{p}{j}\right) \right)}. \quad (17.30)$$

2. Определяем полюсы функции $|H(p)|^2$, для этого:

а) найдем корни полинома знаменателя из уравнения

$$\frac{1}{\varepsilon^2} + T_m^2\left(\frac{p}{j}\right) = 0, \text{ откуда } T_m\left(\frac{p}{j}\right) = j\frac{1}{\varepsilon} \text{ или } \cos\left(m \arccos \frac{p}{j}\right) = j\frac{1}{\varepsilon}; \quad (17.31)$$

б) введем некоторую комплексную функцию $w = u + jv = \arccos(p/j)$ и подставим ее в последнее выражение, имеем

$$\cos(m(u + jv)) = j\frac{1}{\varepsilon} \text{ или } \cos(mu)\cos(jmv) - \sin(mu)\sin(jmv) = j\frac{1}{\varepsilon}; \quad (17.32)$$

в) преобразуем полученное выражение

$$\cos(mu)\operatorname{ch}(mv) - j\sin(mu)\operatorname{sh}(mv) = j\frac{1}{\varepsilon}; \quad (17.33)$$

г) приравняем мнимые и реальные части в последнем выражении

$$\begin{aligned} \cos(mu)\operatorname{ch}(mv) &= 0, \\ -\sin(mu)\operatorname{sh}(mv) &= \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (17.34)$$

д) из этих уравнений имеем

$$u_k = \pi \frac{2k-1}{2m}, \quad k=1, 2, \dots, 2m. \quad (17.35)$$

$$v_k = \frac{\operatorname{Arsh}(1/\varepsilon)}{m}, \quad \kappa=1, \dots, 2m. \quad (17.36)$$

е) подставляем вместо u_k и v_k их выражения, получаем уравнение для определения полюсов функции $|H(p)|^2$

$$p_k = \underbrace{-\sin\left(\pi \frac{2k-1}{2m}\right) \operatorname{sh} \frac{\operatorname{Arsh}(1/\varepsilon)}{m}}_{-\alpha_k} + j \underbrace{\cos\left(\pi \frac{2k-1}{2m}\right) \operatorname{ch} \frac{\operatorname{Arsh}(1/\varepsilon)}{m}}_{\omega_k} \quad (17.37)$$

или $p_k = -\alpha_k + j\omega_k$.

Пример. Пусть $m = 3$, $\varepsilon = 0,51$.

$$\frac{\text{Arsh}(1/0,51)}{3} = 0,476, \quad \text{sh}(0,476) = 0,4942, \quad \text{ch}(0,476) = 1,115.$$

$$p_1 = -\sin \frac{1}{6} \pi \cdot 0,4942 + j \cos \frac{1}{6} \pi \cdot 1,115 = -0,2471 + j0,966;$$

$$p_2 = -0,4942 + j0; \quad p_3 = -0,2471 - j0,966; \quad p_4 = 0,2471 - j0,966;$$

$$p_5 = 0,4942 + j0; \quad p_6 = 0,2471 + j0,966.$$

Представим полюсы на комплексной плоскости (рис. 17.17). Проведем кривую через полюсы, получим – эллипс, большая полуось которого равна

$$b = \text{ch} \frac{\text{Arsh}(1/\varepsilon)}{m} = 1,115,$$

а малая полуось равна

$$a = \text{sh} \frac{\text{Arsh}(1/\varepsilon)}{m} = 0,4942.$$

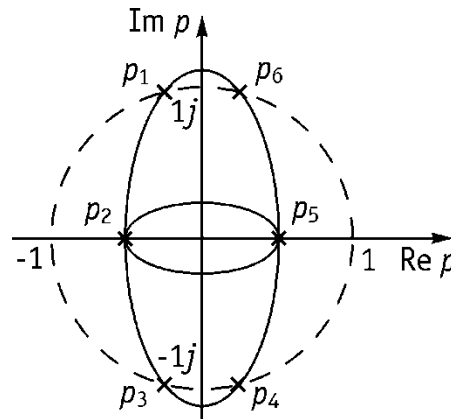


Рис. 17.17

3. Выбираем полюсы, лежащие в левой полуплоскости и записываем нормированную передаточную функцию $H(p)$ фильтра (принимая $H_0=1$)

$$H(p) = \frac{1}{\varepsilon \cdot 2^{(m-1)} (p - p_1) \dots (p - p_m)},$$

где $2^{(m-1)}$ – коэффициент при старшем члене функции Чебышева, имеющим степень m .

4. Зная передаточную функцию $H(p)$, определяем комплексную передаточную функцию $H(j\omega)$: $H(j\omega) = H(p)|_{p=j\omega}$.

Расчет фильтра нижних частот (ФНЧ) с характеристикой Чебышева

Постановка задачи: задана полоса пропускания $(0, \omega_p)$, полоса непропускания (ω_s, ∞) , заданы ослабление A_{pmax} в полосе пропускания и ослабление A_{pmin} в полосе непропускания.

Порядок расчета

1. Нормируем текущую частоту ω относительно частоты пропускания $\Omega = \omega/\omega_{\Pi}$ и определяем нормированные частоты полос пропускания $(0, 1)$ и непропускания (Ω_3, ∞)

$$\Omega_{\Pi} = \omega_{\Pi} / \omega_{\Pi} = 1, \quad \Omega_3 = \omega_3 / \omega_{\Pi}. \quad (17.38)$$

2. Определяем коэффициент неравномерности ослабления ε из уравнения

$$A_p = \frac{1}{2} \ln(1 + \varepsilon^2 T_m^2(\Omega)) \Big|_{\Omega=\Omega_{\Pi}=1} = A_{p \max} [\text{Нп}], \quad \varepsilon = \sqrt{e^{2A_{p \max}} - 1} \quad (17.39)$$

или

$$A_p = 10 \lg(1 + \varepsilon^2 T_m^2(\Omega)) \Big|_{\Omega=\Omega_{\Pi}=1} = A_{p \max} [\text{дБ}], \quad \varepsilon = \sqrt{10^{0,1A_{p \max}} - 1}. \quad (17.40)$$

3. Определяем порядок m фильтра (при этом учтем, что при $\Omega > \Omega_3$ $T_m(\Omega_3) = \text{ch}(m \text{Arch } \Omega_3)$) из уравнений вида

$$A_p = \frac{1}{2} \ln(1 + \varepsilon^2 T_m^2(\Omega)) \Big|_{\Omega=\Omega_3} = A_{p \min} = \frac{1}{2} \ln(1 + \varepsilon^2 \text{ch}^2(m \text{Arch } \Omega_3)) [\text{Нп}], \quad (17.41)$$

откуда

$$m \geq \frac{\text{Arch} \sqrt{(e^{2A_{p \min}} - 1) / \varepsilon^2}}{\text{Arch } \Omega_3}. \quad (17.42)$$

или

$$A_p = 10 \lg(1 + \varepsilon^2 T_m^2(\Omega)) \Big|_{\Omega=\Omega_3} = A_{p \min} = 10 \lg(1 + \varepsilon^2 \text{ch}^2(m \text{Arch } \Omega_3)) [\text{дБ}],$$

откуда

$$m \geq \frac{\text{Arch} \sqrt{(10^{0,1A_{p \min}} - 1) / \varepsilon^2}}{\text{Arch } \Omega_3}. \quad (17.43)$$

4. Зная ε и m , определяем $|H(p)|^2$

$$|H(p)|^2 = H(p) \cdot H(-p) = \frac{H_0^2}{1 + \varepsilon^2 T_m^2(p/j)} = \frac{H_0^2}{\varepsilon^2 (1/\varepsilon^2 + T_m^2(p/j))}. \quad (17.44)$$

5. Определяем полюсы функции $|H(p)|^2$ из уравнения $1/\varepsilon^2 + T_m^2(p/j) = 0$

$$p_k = -\sin\left(\pi \frac{2k-1}{2m}\right) \text{sh} \frac{\text{Arsh} \frac{1}{\varepsilon}}{m} + j \cos\left(\pi \frac{2k-1}{2m}\right) \text{ch} \frac{\text{Arsh} \frac{1}{\varepsilon}}{m}. \quad (17.45)$$

6. Выбираем полюсы, лежащие в левой полуплоскости комплексной плоскости и определяем нормированную передаточную функцию фильтра $H(p)$ (полагая $H_0=1$)

$$H(p) = \frac{1}{\varepsilon \cdot 2^{(m-1)} (p - p_1) \dots (p - p_m)}. \quad (17.46)$$

7. Зная функцию $H(p)$, определяем комплексную передаточную функцию $H(j\omega)$ фильтра $H(j\omega) = H(p) \Big|_{p=j\omega}$.

Замечание. Другие виды фильтров рассчитываются на основе ФНЧ-прототипа, применяя метод преобразования частот и учитывая, что требования к фильтру сохраняются.

Второй этап синтеза фильтров. Реализация фильтра по найденной операторной функции $H(p)$

Существует много методов реализации электрических цепей по передаточным функциям. При реализации передаточной функции $H(p)$ используются, в большинстве случаев, следующие методы:

- 1) метод Дарлингтона;
- 2) метод реализации активными RC-цепями (ARC-цепями).

Реализация фильтра по методу Дарлингтона

Метод позволяет реализовать функцию $H(p)$ (например, ФНЧ) реактивным LC лестничным нагруженным четырехполюсником и основан на разложении в цепную дробь операторного входного сопротивления $Z_{\text{вх}}(p)$ четырехполюсника, которое определяется по найденной функции $H(p)$ фильтра и которое является положительной вещественной функцией (ПВФ).

Постановка задачи: известна передаточная функция $H(p)$ фильтра, необходимо реализовать передаточную функцию LC лестничным нагруженным четырехполюсником, который показан на рис. 17.18 а.

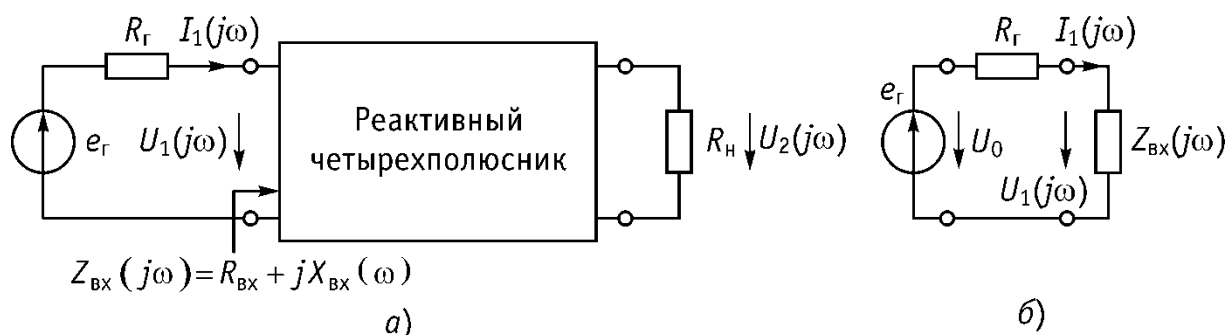


Рис. 17.18

Порядок реализации

Замечание: если четырехполюсник включен между генератором с резистивным сопротивлением R_r и нагрузкой с резистивным сопротивлением R_n , то квадрат модуля комплексной передаточной функции нагруженного четырехполюсника равен обратной величине квадрата модуля рабочей передаточной функции.

1. Зная рабочую передаточную функцию $H(p)$ фильтра, находим входное сопротивление $Z_{\text{вх}}(j\omega)$:

а) определим квадрат модуля передаточной функции четырехполюсника. Поскольку $|H(j\omega)|^2 = 1/|H_p(j\omega)|^2$, тогда

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{4R_r U_2^2(j\omega)}{U_0^2(j\omega) R_n} = \frac{4R_r U_2^2(\omega)}{U_0^2(\omega) R_n}; \quad (17.47)$$

б) выразим мощность на нагрузке $P_H (U_2^2(\omega)/R_H)$ через входной ток $I_1(j\omega)$ и входное сопротивление $Z_{BX}(j\omega)$ (рисунок 17.18 б)

$$P_H = \frac{U_2^2(\omega)}{R_H} = I_1^2(\omega) \operatorname{Re} Z_{BX}(j\omega) = \frac{U_0^2 \operatorname{Re} Z_{BX}(j\omega)}{(R_{BX} + R_\Gamma)^2 + X_{BX}^2} = \frac{U_0^2 \operatorname{Re} Z_{BX}(j\omega)}{|R_\Gamma + Z_{BX}(j\omega)|^2}; \quad (17.48)$$

в) подставим полученное выражение в $|H(j\omega)|^2$ и после преобразования получим

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|^2 &= \frac{4R_\Gamma \operatorname{Re} Z_{BX}(j\omega)}{|R_\Gamma + Z_{BX}(j\omega)|^2} = \frac{|R_\Gamma + Z_{BX}(j\omega)|^2 - |R_\Gamma - Z_{BX}(j\omega)|^2}{|R_\Gamma + Z_{BX}(j\omega)|^2} = \\ &= 1 - \frac{|R_\Gamma - Z_{BX}(j\omega)|^2}{|R_\Gamma + Z_{BX}(j\omega)|^2} = 1 - \frac{(R_\Gamma - Z_{BX}(j\omega))(R_\Gamma - Z_{BX}(-j\omega))}{(R_\Gamma + Z_{BX}(j\omega))(R_\Gamma + Z_{BX}(-j\omega))}, \end{aligned} \quad (17.49)$$

откуда

$$\begin{aligned} &\frac{(R_\Gamma - Z_{BX}(j\omega))(R_\Gamma - Z_{BX}(-j\omega))}{(R_\Gamma + Z_{BX}(j\omega))(R_\Gamma + Z_{BX}(-j\omega))} = \\ &= 1 - \underbrace{\frac{1}{1 + \varepsilon^2 \omega^{2m}}}_{\text{(для фильтра Баттерворта)}} = 1 - \underbrace{\frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_m^2(\omega)}}_{\text{(для фильтра Чебышева)}} = 1 - \underbrace{\frac{1}{1 + \varepsilon^2 \psi^2(\omega)}}_{\text{(в общем виде)}} = 1 - |H(j\omega)|^2. \end{aligned} \quad (17.50)$$

2. Обозначим $\varepsilon \cdot \psi(\omega) = h(\omega)/f(\omega)$ и подставим в выражение для $1 - |H(j\omega)|^2$

$$1 - |H(j\omega)|^2 = 1 - \frac{1}{1 + h^2(\omega)/f^2(\omega)} = \frac{h^2(\omega)}{v^2(\omega)}, \quad (17.51)$$

где $v^2(\omega) = f^2(\omega) + h^2(\omega)$ – полином Гурвица.

3. Поскольку функции $v^2(\omega)$ и $h^2(\omega)$ – полиномы Гурвица, то их можно представить в виде: $v^2(\omega) = v(j\omega)v(-j\omega)$ и $h^2(\omega) = h(j\omega)h(-j\omega)$, тогда из системы уравнений вида

$$1 - |H(j\omega)|^2 = \frac{h^2(\omega)}{v^2(\omega)} = \frac{h(j\omega)h(-j\omega)}{v(j\omega)v(-j\omega)}, \quad (17.52)$$

$$1 - |H(j\omega)|^2 = \frac{(R_\Gamma - Z_{BX}(j\omega))(R_\Gamma - Z_{BX}(-j\omega))}{(R_\Gamma + Z_{BX}(j\omega))(R_\Gamma + Z_{BX}(-j\omega))}, \quad (17.53)$$

переходя к p , имеем

$$\frac{R_\Gamma - Z_{BX}(p)}{R_\Gamma + Z_{BX}(p)} = \pm \frac{h(p)}{v(p)}. \quad (17.54)$$

4. Из последнего выражения определяем входную функцию $Z_{\text{вх}}(p)$ реализуемого четырехполосника

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{v(p) \mp h(p)}{v(p) \pm h(p)} R_{\Gamma}. \quad (17.55)$$

Замечание 1. Если для выбранных, например, верхних знаков входная функция $Z_{\text{вх}}(p)$ будет неправильной дробью, тогда $Z_{\text{вх}}(p) = \infty$ при $p = \infty$, то при реализации по первой форме (схеме) Кауэра необходимо разлагать в цепную дробь функцию $Z_{\text{вх}}(p)$. Для выбранных нижних знаков входная функцию $Z_{\text{вх}}(p)$ будет правильной дробью и $Z_{\text{вх}}(p) = 0$ при $p = \infty$, то при реализации по первой форме (схеме) Кауэра необходимо разлагать в цепную дробь функцию $Y_{\text{вх}}(p) = 1/Z_{\text{вх}}(p)$.

Замечание 2. По входной функции $Z_{\text{вх}}(p)$ можно определить и вторую форму Кауэра, если необходимо реализовать фильтр верхних частот.

5. Разлагая $Z_{\text{вх}}(p)$ в цепную дробь, определяем первую форму Кауэра (реализуем фильтр нижних частот), определяем элементы схемы и конфигурацию фильтра.

Реализация передаточной функции $H(p)$ фильтра ARC-цепями

При реализации передаточной функции $H(p)$ фильтра рассмотрим только каскадное соединение активных RC (ARC) цепей, используя метод уравнивания коэффициентов. При каскадной реализации передаточная функция $H(p)$ фильтра представляется в виде произведения передаточных функций n звеньев (ARC-цепей) 1-го и 2-го порядков

$$H(p) = H_1(p) \cdots H_n(p).$$

Замечание. Если передаточная функция $H(p)$ имеет нечетную степень, то в $H(p)$ обязательно имеется функция передачи первого порядка, которая реализуется цепями рис. 17.19 а или б.

Известно два вида передаточной функции звеньев 1-го порядка и четыре вида 2-го порядка.

1. $H_1(p) = \frac{b_0}{p + \delta}$ – передаточная функция ФНЧ реализуется RC-звеном 1-го порядка (рис. 17.19 а).

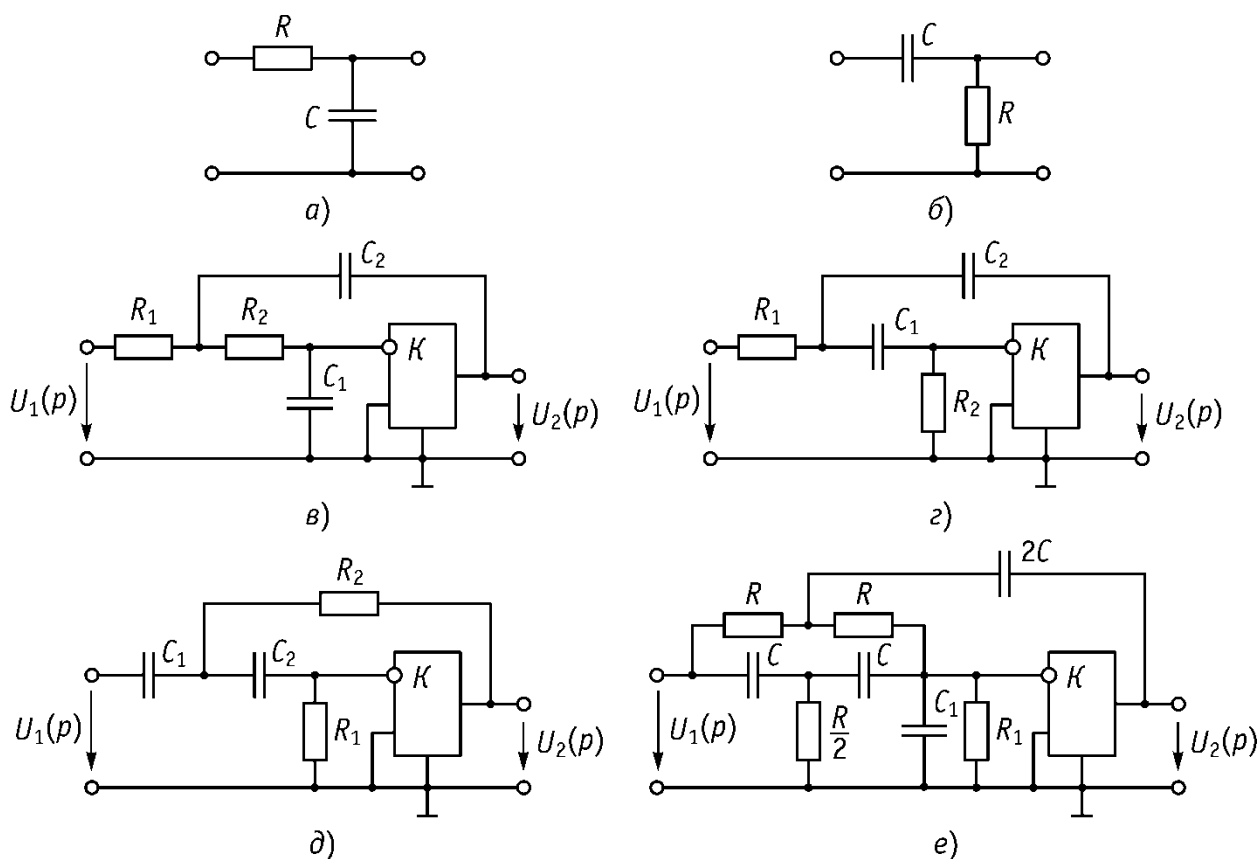


Рис. 17.19

2. $H_2(p) = \frac{b_0 p}{p + \delta}$ – передаточная функция ФВЧ, реализуется CR-звеном 1-го порядка (рис. 17.19 б).

3. $H_3(p) = \frac{b_0}{p^2 + \alpha p + \beta}$ – передаточная функция ФНЧ 2-го порядка, реализуется ARC-звеном 2-го порядка (рис. 17.19 в).

4. $H_4(p) = \frac{b_0 p}{p^2 + \alpha p + \beta}$ – передаточная функция ПФ 2-го порядка, реализуется ARC-звеном 2-го порядка (рис. 17.19 г).

5. $H_5(p) = \frac{b_0 p^2}{p^2 + \alpha p + \beta}$ – передаточная функция ФВЧ 2-го порядка, реализуется ARC-звеном 2-го порядка (рис. 17.19 д).

6. $H_6(p) = \frac{b_0 (p^2 + \omega_0^2)}{p^2 + \alpha p + \beta}$ – передаточная функция РФ 2-го порядка, реализуется ARC-звеном 2-го порядка (рис. 17.19 е).

Замечание 1. Кроме вышеприведенных схем имеются другие схемы, которые реализуют передаточные функции.

Замечание 2. Звенья с одним ОУ применяются или в фильтрах невысокого порядка или для реализации низкодобротных полюсов. Для увеличения добротности полюсов используют звенья на 2-х или 3-х ОУ.

Замечание 3. Передаточные функции n -го порядка всех типов фильтров в общем случае можно представить как произведение передаточных функций следующих видов: 1 и 3 для ФНЧ; 2, 5 и 6 для ФВЧ; функций вида 6 для РФ и произведение всех видов (1, 2, 3, 4, 5, 6) для ПФ.

Добротности полюсов и частоты полюсов

Пусть передаточная функция $H(p)$ фильтра имеет вид

$$H(p) = 1 / (p^2 + \alpha p + \beta).$$

Полюсы функции определяются из уравнения

$$p_{1,2} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \beta} = -\delta \pm j\omega. \quad (17.56)$$

Добротность и частота полюсов определяются следующим образом

$$Q = \frac{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}}{2|\delta|}, \quad \omega_{\Pi} = \sqrt{\delta^2 + \omega^2}. \quad (17.57)$$

Заметим, что $\alpha = 2\delta$, $\beta = \delta^2 + \omega^2 = \omega_{\Pi}^2$.

В общем случае для k -го полюса

$$Q_k = \sqrt{\delta_k^2 + \omega_k^2} / 2|\delta_k|, \quad \omega_{\Pi k} = \sqrt{\delta_k^2 + \omega_k^2}. \quad (17.58)$$

В соответствии с понятиями добротности и частоты полюса передаточная функция ФНЧ 2-го порядка может быть представлена в виде

$$H(p) = 1 / \left(p^2 + \frac{\omega_{\Pi}}{Q} p + \omega_{\Pi}^2 \right). \quad (17.59)$$

Нормирование элементов схемы и частоты

При расчете электрических цепей часто возникают большие разбросы значений элементов, поэтому элементы цепей нормируют.

Например, для последовательного контура выбирают нормированное сопротивление R_{Π} равным ρ ($R_{\Pi} = \rho$), нормированную частоту ω_{Π} равной ω_{ρ} ($\omega_{\Pi} = \omega_{\rho}$), тогда

1. Нормированное комплексное сопротивление

$$\bar{Z}_{\Pi} = \frac{Z}{R_{\Pi}} = \frac{R}{R_{\Pi}} + j \frac{\omega \omega_{\Pi} L}{\omega_{\Pi} R_{\Pi}} - j \frac{\omega_{\Pi}}{\omega \omega_{\Pi} C R_{\Pi}} = \bar{R} + j \bar{\Omega} \cdot \bar{L} - j \frac{1}{\bar{\Omega} \cdot \bar{C}}. \quad (17.60)$$

2. Нормированная частота

$$\bar{\Omega} = \omega / \omega_{\Pi}. \quad (17.61)$$

3. Нормированная индуктивность

$$\bar{L}_{\Pi} = \omega_{\Pi} L / R_{\Pi}. \quad (17.62)$$

4. Нормированная емкость

$$\bar{C}_{\Pi} = \omega_{\Pi} C \cdot R_{\Pi}. \quad (17.63)$$

5. Нормированное резистивное сопротивление

$$\bar{R} = R/R_{\text{н}} . \quad (17.64)$$

При расчете фильтров принято нормировать частоту, например, для ФНЧ $\Omega = \omega/\omega_{\text{н}}$ ($\omega/\omega_{\text{п}}$ – для ФНЧ), емкость и индуктивность $\bar{C} = \omega_{\text{н}} C \cdot R_{\text{н}}$, $\bar{L} = \omega_{\text{н}} L/R_{\text{н}}$.

Лекция 32

Синтез фильтра верхних частот (ФВЧ), полосового фильтра (ПФ) и режекторного фильтра (РФ)

Синтез указанных фильтров можно производить, используя те же методы, что и при синтезе ФНЧ. Однако для облегчения решения задачи синтеза ФВЧ, ПФ, РФ были разработаны методы синтеза на основе фильтра нижних частот. В теории доказано: если в реактивном ФНЧ заменить по определенным правилам все элементы на другие реактивные элементы, то можно получить другие типы фильтров, поэтому ФНЧ называется низкочастотным прототипом (ФНЧ-прототип). Эти правила реализуются соответствующими преобразующими функциями, которые позволяют требования на ФВЧ, ПФ, РФ преобразовать в требования ФНЧ, а после расчета и реализации (синтеза) ФНЧ преобразовать передаточную функцию и элементы ФНЧ в передаточную функцию и элементы других типов фильтров.

Общий порядок синтеза фильтра верхних частот, полосового и режекторного фильтров

1. Требования на ФВЧ, ПФ, РФ переводятся преобразующими функциями в требования на ФНЧ, при этом требования на ослабления в полосе пропускания и в полосе непропускания остаются неизменными.

2. По данным требованиям определяется коэффициент неравномерности и порядок фильтра ФНЧ, определяются полюсы, и определяется передаточная функция ФНЧ.

3. По передаточной функции определяется схема ФНЧ.

4. Передаточная функция ФНЧ преобразующими функциями преобразуется в передаточную функцию требуемого фильтра (ФВЧ, ПФ или РФ).

5. Реактивные элементы ФНЧ преобразующими функциями преобразуются в реактивные элементы требуемого фильтра: ФВЧ, ПФ или РФ.

Замечание. Если необходимо реализовать передаточную функцию требуемого фильтра (ФВЧ, ПФ или РФ) ARC-цепями, тогда используются ARC-звенья и производится синтез требуемого фильтра ARC-цепями.

Преобразование LC-фильтра нижних частот в фильтр верхних частот

Преобразование осуществляется преобразующей функцией для частот вида

$$j\omega_{\text{нч}} = \omega_0^2 / j\omega_{\text{вч}} \quad \text{или} \quad \omega_{\text{нч}} = -\omega_0^2 / \omega_{\text{вч}}, \quad (17.65)$$

где $\omega_0^2 = \omega_{\text{снч}} \cdot \omega_{\text{свч}}$, $\omega_{\text{снч}}$ – частота среза ФНЧ (верхняя частота полосы пропускания ФНЧ), $\omega_{\text{свч}}$ – частота среза ФВЧ (нижняя частота полосы пропускания ФВЧ).

При преобразовании полосы прозрачности $(-\omega_{\text{снч}}, 0)$, $(0, \omega_{\text{снч}})$ и непрозрачности $(-\infty, -\omega_{\text{знч}})$, $(\omega_{\text{знч}}, \infty)$ ФНЧ преобразуются в полосы прозрачности и непрозрачности ФВЧ, то есть:

- а) частота $\omega_{\text{нч}} = -\infty$ преобразуется в частоту $\omega_{\text{вч}} = 0$;
- б) частота $\omega_{\text{нч}} = -\omega_{\text{знч}}$ преобразуется в частоту $\omega_{\text{звч}}$;
- в) частота $\omega_{\text{нч}} = -\omega_{\text{снч}}$ преобразуется в частоту $\omega_{\text{свч}}$;
- г) частота $\omega_{\text{нч}} = 0$ преобразуется в частоту $\omega_{\text{вч}} = \infty$.

Замечание 1. Преобразующая функция для комплексной переменной p имеет вид

$$p_{\text{нч}} = \omega_0^2 / p_{\text{вч}}, \quad (17.66)$$

где $p_{\text{нч}} = \delta + j\omega_{\text{нч}}$ – комплексная переменная ФНЧ; $p_{\text{вч}} = \alpha + j\omega_{\text{вч}}$ – комплексная переменная ФВЧ.

Замечание 2. Обычно при расчете ФНЧ-прототипа используют нормированную частоту $\Omega = \omega_{\text{нч}} / \Delta\omega_{\text{нч}}$

$$\Omega = \frac{\omega_{\text{нч}}}{\Delta\omega_{\text{нч}}} = -\frac{\omega_0^2}{\omega_{\text{вч}}\Delta\omega_{\text{нч}}}, \quad (17.67)$$

где $\Delta\omega_{\text{нч}}$ – полоса пропускания ФНЧ.

Замечание 3. Преобразующая функция для нормированной комплексной переменной $\hat{p}$ имеет вид

$$\hat{p}_{\text{нч}} = p_{\text{нч}} / \Delta\omega_{\text{нч}} = \hat{\sigma} + j\Omega \quad \text{и} \quad \hat{p}_{\text{нч}} = \omega_0^2 / (p_{\text{вч}} \cdot \Delta\omega_{\text{нч}}), \quad \text{откуда}$$

$$p_{\text{вч}} \Delta\omega_{\text{нч}} \hat{p}_{\text{нч}} = \omega_0^2, \quad (17.68)$$

Преобразование нормированной операторной передаточной функции ФНЧ в операторную функцию ФВЧ

Пусть нормированная передаточная функция ФНЧ имеет вид

$$H_{\text{нч}}(\hat{p}_{\text{нч}}) = \frac{1}{\hat{p}_{\text{нч}}^2 + \alpha \hat{p}_{\text{нч}} + \beta}. \quad (17.69)$$

Используя преобразующую функцию для нормированной комплексной переменной $\hat{p}_{\text{нч}}$, находим денормированную операторную передаточную функцию ФВЧ следующим образом

$$H_{\text{вч}}(p_{\text{вч}}) = \frac{p_{\text{вч}}^2 \Delta\omega_{\text{нч}}^2}{p_{\text{вч}}^2 \beta \Delta\omega_{\text{нч}}^2 + p_{\text{вч}} \alpha \omega_0^2 \Delta\omega_{\text{нч}} + \omega_0^4}. \quad (17.70)$$

Преобразование элементов схемы ФНЧ в элементы схемы ФВЧ

Преобразование элементов производится по преобразующей функции для частот. На рис. 17.20 и рис. 17.21 показано преобразование элементов и преобразование схемы ФНЧ 3-го порядка в схему ФВЧ 3-го порядка.

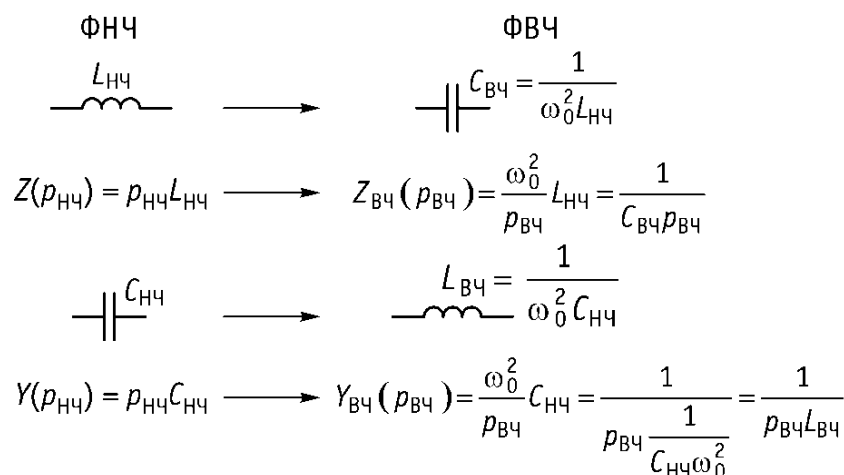


Рис. 17.20

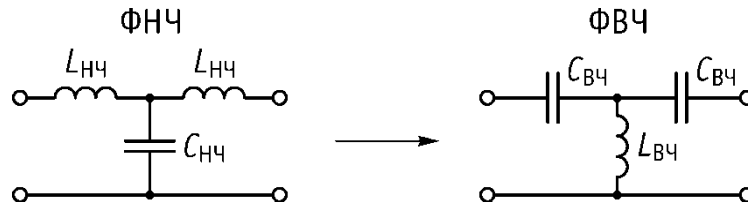


Рис. 17.21

Преобразование ФНЧ-прототипа в полосовой фильтр

Преобразование осуществляется преобразующей функцией для частот вида

$$j\omega_{нч} = (\omega_0^2 - \omega_{пф}^2) / j\omega_{пф} \quad \text{или} \quad \omega_{нч} = (\omega_{пф}^2 - \omega_0^2) / \omega_{пф}, \quad (17.71)$$

где $\omega_0^2 = \omega_{п1пф} \cdot \omega_{п2пф} = \omega_{з1пф} \cdot \omega_{з2пф}$, $\omega_{п1пф}$, $\omega_{п2пф}$ – соответственно нижняя и верхняя частоты полосы пропускания ПФ; $\omega_{з1пф}$, $\omega_{з2пф}$ – соответственно верхняя и нижняя граничные частоты полос непропускания ПФ ($(0, \omega_{з1пф})$ ($\omega_{з2пф}, \infty$)).

При преобразовании полосы прозрачности $(-\omega_{снч}, 0)$, $(0, \omega_{снч})$ и непрозрачности $(-\infty, -\omega_{знч})$, $(\omega_{знч}, \infty)$ ФНЧ преобразуются в полосы прозрачности и непрозрачности ПФ, то есть:

- а) частота $\omega_{нч} = -\infty$ преобразуется в частоту $\omega_{пф} = 0$;
- б) частота $\omega_{нч} = -\omega_{знч}$ преобразуется в частоту $\omega_{з1пф}$;
- в) частота $\omega_{нч} = -\omega_{снч}$ преобразуется в частоту $\omega_{п1пф}$;
- г) частота $\omega_{нч} = 0$ преобразуется в частоту ω_0 ;
- д) частота $\omega_{нч} = \omega_{снч}$ преобразуется в частоту $\omega_{п2пф}$;
- е) частота $\omega_{нч} = \omega_{знч}$ преобразуется в частоту $\omega_{з2пф}$;
- ж) частота $\omega_{нч} = \infty$ преобразуется в частоту $\omega_{пф} = \infty$.

Замечание 1. Преобразующая функция для комплексной переменной p имеет вид

$$p_{нч} = (\omega_0^2 + p_{пф}^2) / p_{пф}, \quad (17.72)$$

где $p_{нч} = \delta + j\omega_{нч}$ – комплексная переменная ФНЧ; $p_{пф} = \alpha + j\omega_{пф}$ – комплексная переменная ПФ.

Замечание 2. Обычно при расчете ФНЧ-прототипа используют нормированную частоту $\Omega = \omega_{нч} / \Delta\omega_{нч}$, поэтому

$$j\Omega = \frac{\omega_0^2 - \omega_{пф}^2}{j\omega_{пф}\Delta\omega_{нч}} \quad \text{или} \quad \Omega = \frac{\omega_{пф}^2 - \omega_0^2}{\omega_{пф}\Delta\omega_{нч}}. \quad (17.73)$$

Частоты ПФ определяются по формуле

$$\omega_{пфj} = \pm \frac{\Omega_i \Delta\omega_{нч}}{2} + \sqrt{\frac{\Omega_i^2 \Delta\omega_{нч}^2}{4} + \omega_0^2}, \quad (17.74)$$

где $\Delta\omega_{нч}$ – полоса пропускания ФНЧ, Ω_i – частоты ФНЧ, $\omega_{пфj}$ – частоты ПФ.

Замечание 3. Преобразующая функция для нормированной комплексной переменной $\hat{p}_{нч}$ имеет вид

$$\hat{p}_{нч} = (\omega_0^2 + p_{пф}^2) / p_{пф} \Delta\omega_{нч}. \quad (17.75)$$

Полюсы $p_{пфj}$ передаточной функции ПФ определяются через полюсы $\hat{p}_{нчi}$ передаточной функции ФНЧ по формуле

$$p_{пфj1,2} = \frac{\hat{p}_{нчi} \Delta\omega_{нч}}{2} \pm \sqrt{\frac{\hat{p}_{нчi}^2 \Delta\omega_{нч}^2}{4} - \omega_0^2}. \quad (17.76)$$

Преобразование нормированной операторной передаточной функции ФНЧ в операторную передаточную функцию ПФ

Пусть нормированная передаточная функция ФНЧ имеет вид (характеристика Баттерворта)

$$H_{нч}(\hat{p}_{нч}) = 1 / (\hat{p}_{нч}^2 + \alpha \hat{p}_{нч} + \beta). \quad (17.77)$$

Используя преобразующую функцию для нормированной комплексной переменной $\hat{p}_{нч}$, находим денормированную операторную передаточную функцию ПФ следующим образом

$$H_{пф}(p_{пф}) = \frac{p_{пф}^2 \Delta\omega_{нч}^2}{(p_{пф}^2 + \omega_0^2)^2 + \alpha \cdot p_{пф} \cdot \Delta\omega_{нч} (p_{пф}^2 + \omega_0^2) + \beta \cdot p_{пф}^2 \cdot \Delta\omega_{нч}^2}. \quad (17.78)$$

Преобразование элементов схемы ФНЧ в элементы схемы ПФ

Преобразование производится по преобразующей функции. На рис. 17.22 и рис. 17.23 показано преобразование элементов и преобразование схемы ФНЧ 3-го порядка в схему ПФ 6-го порядка

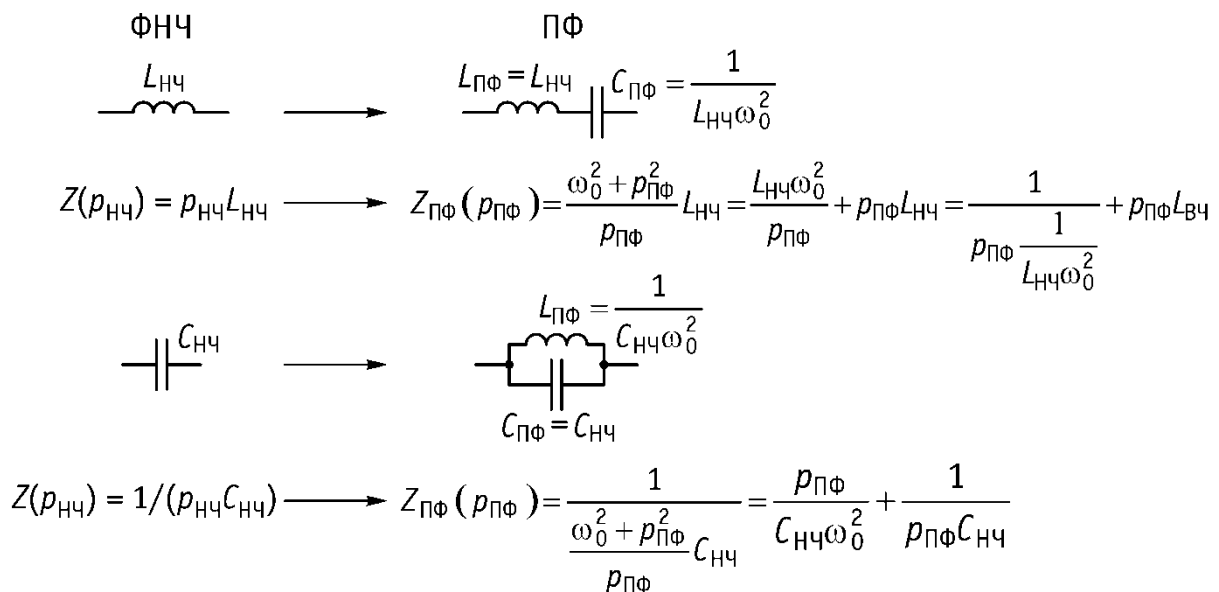


Рис. 17.22

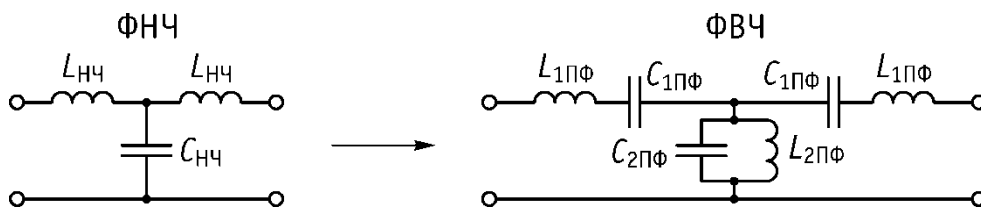


Рис. 17.23

Преобразование ФНЧ-прототипа в режекторный фильтр

Преобразование осуществляется преобразующей функцией для частот вида

$$j\omega_{\text{нч}} = \frac{\omega_0^2 j\omega_{\text{рф}}}{\omega_0^2 + (j\omega_{\text{рф}})^2} \quad \text{или} \quad \omega_{\text{нч}} = \frac{\omega_0^2 \omega_{\text{рф}}}{\omega_0^2 - \omega_{\text{рф}}^2}, \quad (17.79)$$

где $\omega_0^2 = \omega_{\text{п1рф}} \cdot \omega_{\text{п2рф}} = \omega_{\text{з1рф}} \cdot \omega_{\text{з2рф}}$, $\omega_{\text{п1рф}}$, $\omega_{\text{п2рф}}$ – соответственно верхняя и нижняя частоты полос пропускания РФ ($(0, \omega_{\text{п1рф}})$ ($\omega_{\text{п2рф}}, \infty$)); $\omega_{\text{з1рф}}$, $\omega_{\text{з2рф}}$ – соответственно нижняя и верхняя граничные частоты полос непропускания РФ. При преобразовании полосы прозрачности $(-\omega_{\text{снч}}, 0)$, $(0, \omega_{\text{снч}})$ и непрозрачности $(-\infty, -\omega_{\text{знч}})$, $(\omega_{\text{знч}}, \infty)$ ФНЧ преобразуются в полосы непрозрачности и прозрачности РФ, то есть:

- а) частота $\omega_{\text{нч}} = \pm\infty$ преобразуется в частоту $\omega_{\text{рф}} = \omega_0$;
- б) частота $\omega_{\text{нч}} = -\omega_{\text{знч}}$ преобразуется в частоту $\omega_{\text{з2рф}}$;
- в) частота $\omega_{\text{нч}} = -\omega_{\text{снч}}$ преобразуется в частоту $\omega_{\text{п2рф}}$;
- г) частота $\omega_{\text{нч}} = 0$ преобразуется в частоту $\omega_{\text{рф}} = 0, \infty$;
- д) частота $\omega_{\text{нч}} = \omega_{\text{снч}}$ преобразуется в частоту $\omega_{\text{п1рф}}$;
- е) частота $\omega_{\text{нч}} = \omega_{\text{знч}}$ преобразуется в частоту $\omega_{\text{з1рф}}$.

Замечание 1. Преобразующая функция для комплексной переменной p имеет вид

$$p_{\text{нч}} = \frac{\omega_0^2 p_{\text{рф}}}{p_{\text{рф}}^2 + \omega_0^2}, \quad (17.80)$$

где $p_{\text{нч}} = \delta + j\omega_{\text{нч}}$ – комплексная переменная ФНЧ; $p_{\text{рф}} = \alpha + j\omega_{\text{рф}}$ – комплексная переменная ПФ.

Замечание 2. Обычно при расчете ФНЧ-прототипа используют нормированную частоту $\Omega = \omega_{\text{нч}} / \Delta\omega_{\text{нч}}$, поэтому

$$j\Omega_{\text{нч}} = \frac{\omega_0^2 j\omega_{\text{рф}}}{(\omega_0^2 - \omega_{\text{рф}}^2) \Delta\omega_{\text{нч}}} \quad \text{или} \quad \Omega_{\text{нч}} = \frac{\omega_0^2 \omega_{\text{рф}}}{(\omega_0^2 - \omega_{\text{рф}}^2) \Delta\omega_{\text{нч}}}. \quad (17.81)$$

Частоты РФ можно определить из последней формулы.

Замечание 3. Преобразующая функция для нормированной комплексной переменной $\hat{p}$ имеет вид

$$\hat{p}_{\text{нч}} = \frac{\omega_0^2 p_{\text{рф}}}{(p_{\text{рф}}^2 + \omega_0^2) \Delta\omega_{\text{нч}}}. \quad (17.82)$$

Из этого уравнения можно определить полюсы передаточной функции РФ.

Преобразование нормированной операторной передаточной функции ФНЧ в операторную передаточную функцию РФ

Пусть нормированная передаточная функция ФНЧ имеет вид

$$H_{\text{нч}}(\hat{p}_{\text{нч}}) = 1 / (\hat{p}_{\text{нч}}^2 + \alpha \hat{p}_{\text{нч}} + \beta). \quad (17.83)$$

Используя преобразующую функцию для нормированной комплексной переменной $\hat{p}_{\text{нч}}$, находим денормированную операторную передаточную функцию РФ следующим образом

$$H_{\text{пф}}(p_{\text{пф}}) = \frac{(p_{\text{рф}}^2 + \omega_0^2)^2 \Delta \omega_{\text{нч}}^2}{\omega_0^4 p_{\text{рф}}^2 + \alpha \cdot \omega_0^2 p_{\text{рф}} \Delta \omega_{\text{нч}} (p_{\text{рф}}^2 + \omega_0^2) + \beta (p_{\text{рф}}^2 + \omega_0^2)^2 \Delta \omega_{\text{нч}}^2}. \quad (17.84)$$

Преобразование элементов схемы ФНЧ в элементы схемы РФ

Преобразование производится по преобразующей функции. На рис. 17.24 и рис. 17.25 показано преобразование элементов и преобразование схемы ФНЧ в схему РФ.

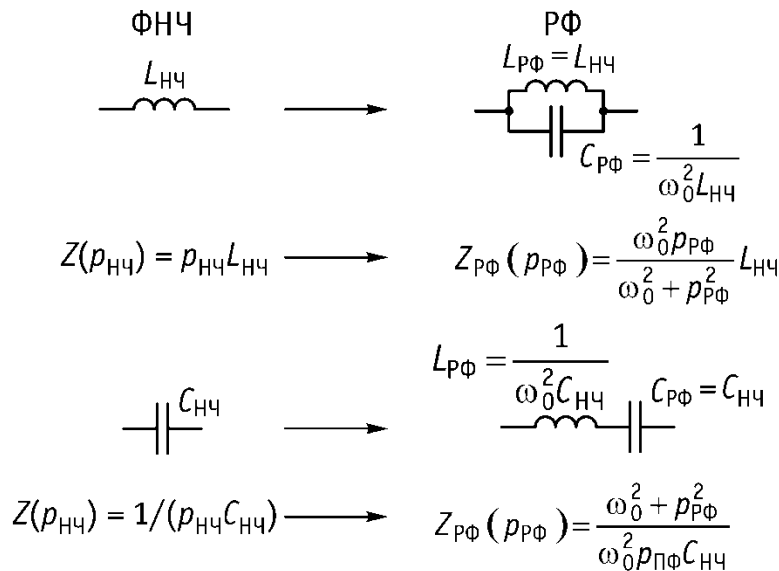


Рис. 17.24

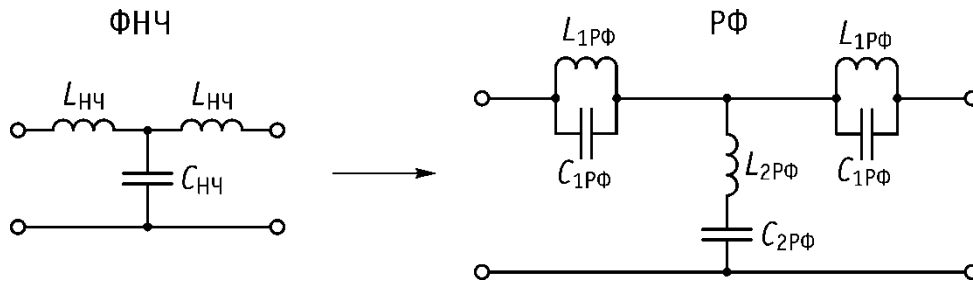


Рис. 17.25

Замечание. Передаточные функции ФВЧ, ПФ, РФ можно найти, зная полюсы $P_{\text{ВЧ}}$, $P_{\text{ПФ}}$, $P_{\text{РФ}}$.

Расчет полосового фильтра с характеристикой Чебышева

Постановка задачи: необходимо рассчитать полосовой фильтр, если полоса пропускания равна $(\omega_{\text{п1пф}}, \omega_{\text{п2пф}})$, полосы непропускания ПФ равны $((0, \omega_{\text{з1пф}}) (\omega_{\text{з2пф}}, \infty))$. Рабочее ослабление в полосе пропускания $A_{\text{рmax}}$, рабочее ослабление в полосе непропускания $A_{\text{рmin}}$.

Порядок расчета

1. Переводим требования к ПФ в требования к ФНЧ

а) $A_{\text{рminНЧ}} = A_{\text{рminПФ}}$, $A_{\text{рmaxНЧ}} = A_{\text{рmaxПФ}}$.

б) определяем полосу пропускания и полосу непропускания ФНЧ из системы уравнений, полученной с помощью преобразующей функции

$$\left. \begin{aligned} -\omega_{снч} &= (\omega_{п1пф}^2 - \omega_0^2) / \omega_{п1пф} \\ \omega_{снч} &= (\omega_{п2пф}^2 - \omega_0^2) / \omega_{п2пф} \\ -\omega_{знч} &= (\omega_{з1пф}^2 - \omega_0^2) / \omega_{з1пф} \\ \omega_{знч} &= (\omega_{з2пф}^2 - \omega_0^2) / \omega_{з2пф} \end{aligned} \right\},$$

полагая $\omega_0^2 = \omega_{п1пф} \omega_{п2пф} = \omega_{з1пф} \omega_{з2пф}$), получаем

$$\omega_{знч} = \omega_{з2пф} - \omega_{з1пф}; \quad \omega_{снч} = \omega_{п2пф} - \omega_{п1пф}.$$

2. По известным значениям $\omega_{снч}$, $\omega_{знч}$, $A_{p\min}$, $A_{p\max}$ рассчитываем ФНЧ с характеристикой Чебышева.

3. В результате расчета ФНЧ-прототипа определяем полюсы $\hat{p}_{нч1}$, $\hat{p}_{нч2}$, ..., $\hat{p}_{нчn}$ и операторную передаточную функцию фильтра $H(\hat{p}_{нч})$ и комплексную передаточную функцию $H(j\Omega)$; определяем нормированные частоты $\Omega_{i\min}$, $\Omega_{i\max}$, при которых модуль функции $|H(j\Omega)|$ принимает максимальные и минимальные значения.

4. Зная полюсы $\hat{p}_{нчi}$ $i=1, 2, \dots, n$ ФНЧ, определяем полюсы $p_{пфj1,2}$ полосового фильтра по формуле

$$p_{пфj1,2} = \frac{\hat{p}_{нчi} \Delta\omega_{нч}}{2} \pm \sqrt{\frac{\hat{p}_{нчi}^2 \Delta\omega_{нч}^2}{4} - \omega_0^2} = \alpha_j \pm \omega_j.$$

5. Зная нормированные частоты $\Omega_{i\min}$, $\Omega_{i\max}$ ФНЧ, определяем частоты $\omega_{пфj}$ ПФ, включая частоты $\omega_{п1пф}$, $\omega_{п2пф}$, $\omega_{з1пф}$, $\omega_{з2пф}$, по формуле

$$\omega_{пфj} = \pm \frac{\Omega_i \Delta\omega_{нч}}{2} + \sqrt{\frac{\Omega_i^2 \Delta\omega_{нч}^2}{4} + \omega_0^2}.$$

6. Зная полюсы, определяем передаточную функцию $H_{пф}(p)$ полосового фильтра (например, если ФНЧ 3-го порядка, тогда ПФ – 6-го порядка)

$$\begin{aligned} H_{пф}(p_{пф}) &= \frac{\Delta\omega^3 p_{пф}^3}{\varepsilon 2^{3-1} (p_{пф} - p_{пф1}) \dots (p_{пф} - p_{пф6})} = \\ &= \frac{\Delta\omega p_{пф}}{\sqrt[3]{4\varepsilon} (p_{пф}^2 + a_1 p_{пф} + a_{01})} \cdot \frac{\Delta\omega p_{пф}}{\sqrt[3]{4\varepsilon} (p_{пф}^2 + a_2 p_{пф}' + a_{02})} \cdot \frac{\Delta\omega p_{пф}}{\sqrt[3]{4\varepsilon} (p_{пф}^2 + a_3 p_{пф} + a_{03})}, \end{aligned}$$

где $a_{0i} = \alpha_i^2 + \omega_i^2$, $a_i = 2\alpha_i$, $j = 1, 2, 3$ ($p_i = \alpha_i \pm j\omega_i$).

7. Заменяя $P_{\text{пф}}$ на $j\omega_{\text{пф}}$, определяем модуль комплексной передаточной функции полосового фильтра

$$|H(j\omega_{\text{пф}})| = \frac{\Delta\omega\omega_{\text{пф}}}{\sqrt[3]{4\varepsilon}\sqrt{(a_{01}-\omega_{\text{пф}}^2)^2+a_1^2\omega_{\text{пф}}^2}} \cdot \frac{\Delta\omega\omega_{\text{пф}}}{\sqrt[3]{4\varepsilon}\sqrt{(a_{02}-\omega_{\text{пф}}^2)^2+a_2^2\omega_{\text{пф}}^2}} \cdot \frac{\Delta\omega\omega_{\text{пф}}}{\sqrt[3]{4\varepsilon}\sqrt{(a_{03}-\omega_{\text{пф}}^2)^2+a_3^2\omega_{\text{пф}}^2}}.$$

На рис. 17.26 качественно приведены графики модулей комплексных передаточных функций ФНЧ третьего порядка и ПФ шестого порядка с характеристиками Чебышева.

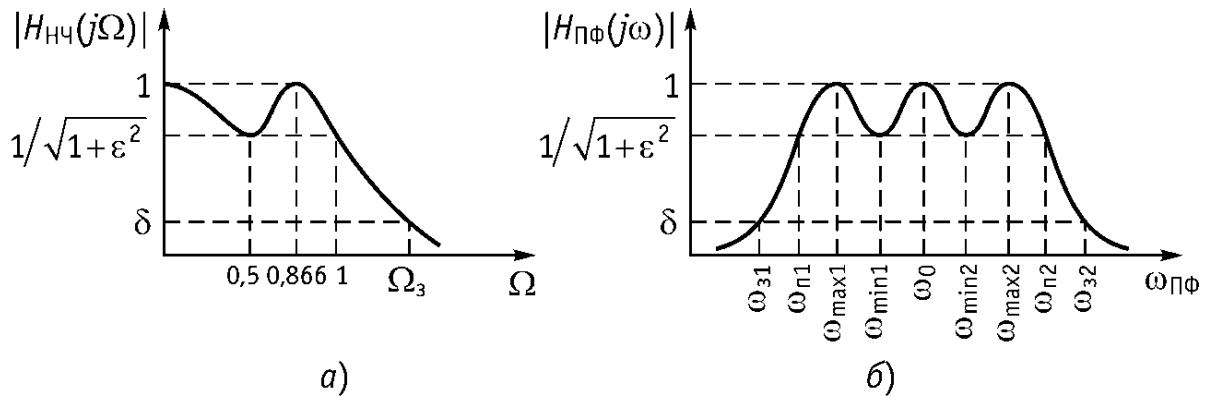


Рис. 17.26

ТЕМА 18. Корректирующие электрические цепи и их синтез

Лекция 33

Линейные амплитудно-частотные и фазо-частотные искажения в электрических цепях. Амплитудные и фазовые корректоры

Линейные амплитудно-частотные и фазо-частотные искажения – это искажения, обусловленные наличием в электрической цепи реактивных элементов.

Если ширина спектра сигнала $\Delta\omega_1$ мала (меньше полосы пропускания) ($\Delta\omega_1 \ll \omega_n$), то $|H(j\omega)| = \text{const}$ (ФЧХ линейна), следовательно, амплитудно- и фазо-частотных искажений нет.

Если ширина спектра сигнала больше полосы пропускания ($\Delta\omega_2 > \omega_n$), то $|H(j\omega)| \neq \text{const}$ (ФЧХ нелинейна) и сигнал передается с искажениями.

Принцип корректирования амплитудно-частотных и фазо-частотных искажений

Пусть имеется электрическая цепь с передаточной функцией $H(j\omega)$, полоса пропускания которой меньше ширины спектра сигнала ($\Delta\omega_c > \omega_n$). Амплитудно-частотная характеристика имеет вид, приведенный на рис. 18.1 а.

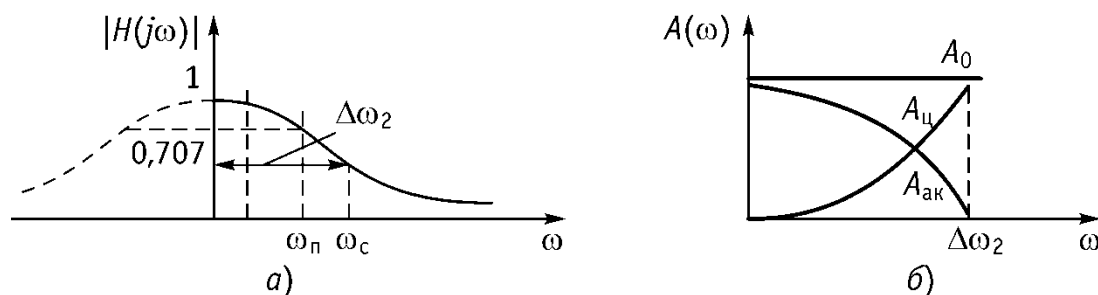


Рис. 18.1

Амплитудно-частотные искажения (АЧИ) будут отсутствовать, если при включении в цепь амплитудного корректора, модуль передаточной функции всей цепи $H_{\Sigma}(j\omega)$ будет постоянным, или ослабление всей цепи будет постоянным и равным A_0 (рис. 18.1 б).

При этом ослабление амплитудного корректора можно определить по формуле

$$A_{\text{ак}}(\omega) = A_0 - A_{\text{ц}}(\omega), \quad (18.1)$$

где $A_{\text{ц}}(\omega)$ – ослабление исходной цепи.

Принцип корректирования фазо-частотных искажений (ФЧИ) заключается в том, что по ФЧХ цепи определяют групповое время прохождения (ГВП) цепи по формуле

$$t_{\text{гр}} = \frac{d(\arg H(j\omega))}{d\omega} = \frac{dB_p(\omega)}{d\omega}, \quad (18.2)$$

где $B_p(\omega)$ – рабочая фазовая постоянная (фазочастотная характеристика цепи). Задаются некоторым постоянным временем t_0 , которое больше максимального значения $t_{\text{грц}}$ цепи. Определяют $t_{\text{грфк}}$ фазового корректора (рис. 18.2), по которому синтезируют фазовый корректор.

Пассивные амплитудные корректоры

Пассивные амплитудные корректоры – это, как правило, четырехполюсники постоянного характеристического сопротивления, нагруженные согласованно. Такие четырехполюсники можно реализовать в виде мостовых схем или в виде симметричных перекрытых Т-образных схем (рис. 18.3). Здесь $\underline{Z}_1$ и $\underline{Z}_2$ обратные двухполюсники, удовлетворяющие условию $\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = R_0^2$, откуда $Z_1(j\omega) = R_0^2 / Z_2(j\omega)$. Выбираем симметричную перекрытую Т-образную схему.

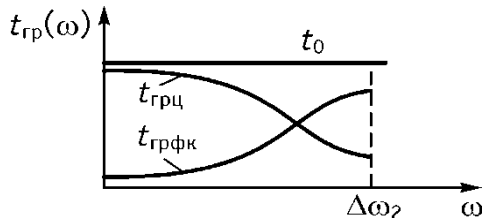


Рис. 18.2

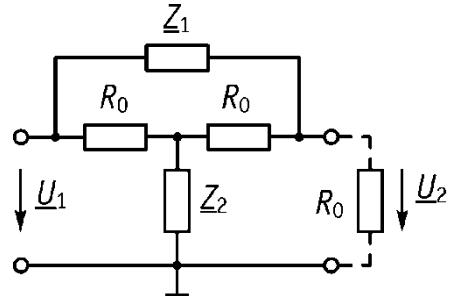


Рис. 18.3

Цель анализа: определить передаточную функцию, ослабление, собственное сопротивление корректора, сопротивления двухполюсников $\underline{Z}_1$ и $\underline{Z}_2$.

Анализ

1. Определяем комплексную передаточную функцию

$$H_{ак}(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{R_0}{Z_1(j\omega) + R_0} = \frac{Z_2(j\omega)}{R_0 + Z_2(j\omega)}. \quad (18.3)$$

2. Определяем ослабление корректора

$$A_{ак}(\omega) = 20 \lg \frac{1}{|H_{ак}(j\omega)|} = 20 \lg \left| 1 + \frac{Z_1(j\omega)}{R_0} \right| = 20 \lg \left| 1 + \frac{R_0}{Z_2(j\omega)} \right|. \quad (18.4)$$

3. Определяем собственные сопротивления корректора

$$\underline{Z}_{c1} = R_0 = \underline{Z}_{c2} = \sqrt{\underline{Z}_{1xx} \cdot \underline{Z}_{1кз}}. \quad (18.5)$$

4. Определяем сопротивления двухполюсников, зная функцию $H_{ак}(j\omega)$

$$Z_1(j\omega) = R_0 \frac{1 - H_{ак}(j\omega)}{H_{ак}(j\omega)}, \quad Z_2(j\omega) = R_0 \frac{H_{ак}(j\omega)}{1 - H_{ак}(j\omega)}. \quad (18.6)$$

5. Переходя к p , определяем операторные сопротивления $Z_1(p)$, $Z_2(p)$ двухполюсников

$$Z_1(p) = R_0 \frac{1 - H_{ак}(p)}{H_{ак}(p)}, \quad Z_2(p) = R_0 \frac{H_{ак}(p)}{1 - H_{ак}(p)}. \quad (18.7)$$

Входные сопротивления двухполюсников $\underline{Z}_1$ и $\underline{Z}_2$ должны быть положительными вещественными функциями (они лежат в основе синтеза амплитудных корректоров).

Замечание 1. Если известно ослабление цепи (рис. 18.4 а), то определить зависимость затухания корректора (рис. 18.4 б) можно по формуле

$$A_{ак}(\omega) = A_0 - A_{ц}(\omega), \quad (18.8)$$

где $A_{ак}(\omega)$ – рабочее ослабление амплитудного корректора; $A_{ц}(\omega)$ – рабочее ослабление электрической цепи; $(0, \omega_2)$ – диапазон частот амплитудного корректора.

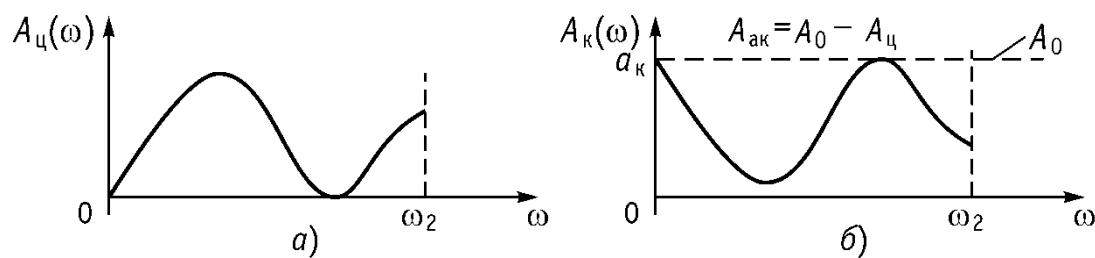


Рис. 18.4

Замечание 2. Чаще всего двухполюсник продольной цепи состоит из включенных параллельно резистивной проводимости G_1 и реактивной проводимости B_1 , потому сопротивление $Z_1(j\omega)$ равно

$$Z_1(j\omega) = \frac{1}{G_1 + jB_1}, \text{ тогда } Z_2(j\omega) = \frac{R_0^2}{Z_1(j\omega)} = R_0^2 G_1 + jR_0^2 B_1 = R_2 + jX_2.$$

Замечание 3. Максимальное значение ослабления корректора $A_{ак}$ наступает на частотах, когда $B_1 = 0$, тогда $Z_1(j\omega) = R_1$

$$A_{ак}(\omega) = 20 \lg \left| 1 + \frac{R_1}{R_0} \right|.$$

Замечание 4. Наиболее распространенные схемы двухполюсников, используемых в амплитудных корректорах, приведены в табл. 18.1.

Табл. 18.1

Двухполюсник Z_1	Двухполюсник Z_2	$A_k(\omega)$

Активные корректоры

Активные корректоры создаются на основе ARC и ARLC цепей. Существует большое разнообразие активных звеньев, эквивалентных пассивным амплитудным корректорам. Две схемы таких активных звеньев на операционных усилителях изображены на рис. 18.5.

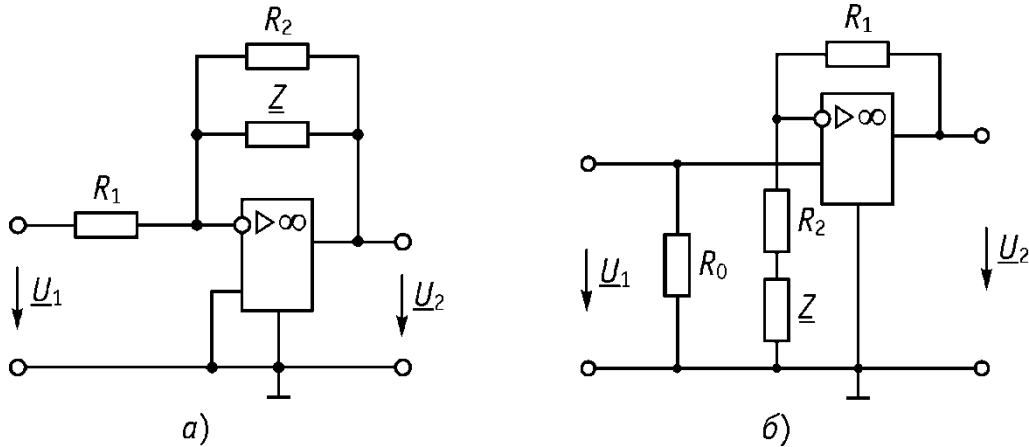


Рис. 18.5

Если $\underline{Z}$ для схемы рисунка 18.5 а состоит из последовательного соединения резистора R и емкости C ($Z(p) = R + 1/(pC)$), а для схемы рисунка 18.5 б из емкости C ($Z(p) = 1/(pC)$), тогда частотные характеристики ослабления для схем (рис. 18.5 а и б) приведены на рис. 18.6 а и б).

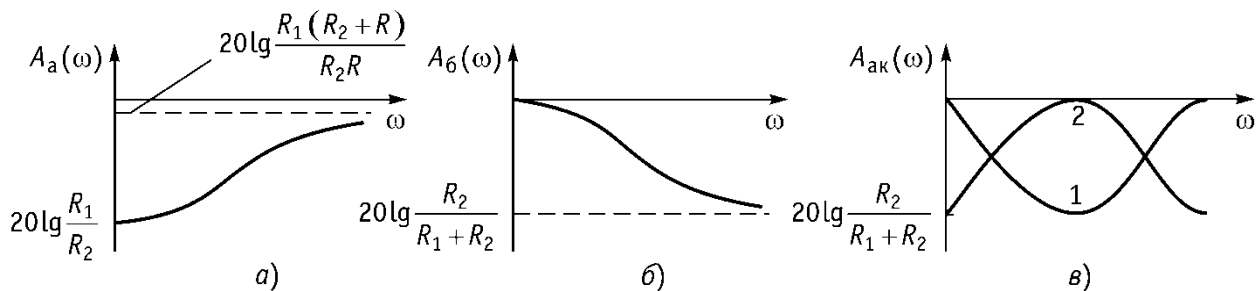


Рис. 18.6

Если $\underline{Z}$ для цепи, приведенной на рис. 18.5 б состоит из последовательно соединенных элементов L и C ($Z_1(p) = pL + 1/(pC)$), то частотная характеристика ослабления будет иметь вид, показанный на рис. 18.6 в, кривая 1, если состоит из параллельно соединенных элементов L и C ($Z_2(p) = LP/(1 + p^2LC)$), то ослабление будет иметь вид, показанный на рис. 18.6 в, кривая 2.

Фазовые корректоры

Фазовый корректор – линейный четырехполюсник с частотно-независимым ослаблением и входным сопротивлением, но с частотно-зависимой фазовой характеристикой.

Фазовые корректоры подразделяются на пассивные и активные, регулируемые и нерегулируемые, гармонические и негармонические.

Фазовый корректор включается в канал связи в сечение, где входное сопротивление по одну сторону сечения чисто активно (рис. 18.7), при этом АЧХ всей цепи не изменяется, так как $Z_{вх} = R_0$.

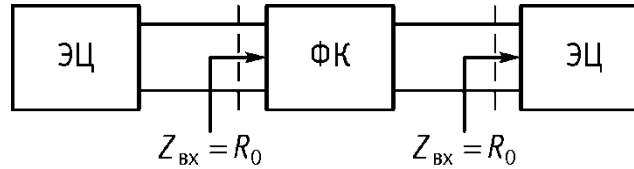


Рис. 18.7

Замечание. Фазовый корректор не должен изменять АЧХ цепи, а должен изменять только ФЧХ цепи, поэтому ФК должен быть электрической цепью неминимально-фазового типа, которая может быть реализована симметричными мостовыми четырехполюсниками, у которых сопротивления $\underline{Z}_1$ и $\underline{Z}_2$ – реактивные и взаимнообратные, т.е. $\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = R_0^2$, $\underline{Z}_1 = jX_1$, $\underline{Z}_2 = jX_2$. Для этих цепей нули передаточной функции располагаются в правой полуплоскости, а полюсы в левой полуплоскости.

Передаточная функция $H(p)$ фазового корректора может быть представлена в виде произведения передаточных функций фазовых звеньев 1-го и 2-го порядков

$$H(p) = \frac{v(-p)}{v(p)} = \frac{-p + \delta_1}{p + \delta_1} \dots \frac{-p + \delta_m}{p + \delta_m} \cdot \frac{p^2 - \alpha_{m+1}p + \beta_{m+1}}{p^2 + \alpha_{m+1}p + \beta_{m+1}} \dots \frac{p^2 - \alpha_n p + \beta_n}{p^2 + \alpha_n p + \beta_n}. \quad (18.9)$$

Замечание. Зная передаточную функцию $H(p)$, заменой $p = j\omega$, можно получить комплексную передаточную функцию

$$H(j\omega) = \frac{A(\omega^2) - j\omega C(\omega^2)}{A(\omega^2) + j\omega C(\omega^2)} = 1 \cdot e^{-j\varphi_H(\omega)}. \quad (18.10)$$

Фазовая постоянная ФК и групповое время прохождения имеют вид

$$B(\omega) = -\varphi(\omega), \quad t_{гр}(\omega) = \frac{dB(\omega)}{d\omega} = 2\varphi_{\Gamma}(\omega) = 2 \arctg \frac{1}{j} \cdot \frac{v(j\omega) - v(-j\omega)}{v(j\omega) + v(-j\omega)}, \quad (18.11)$$

где $\varphi_{\Gamma}(\omega)$ – аргумент полинома Гурвица.

В силу свойств полинома Гурвица: при изменении частоты от 0 до ∞ аргумент полинома монотонно возрастает от 0 до $n\pi/2$ (где n – степень полинома Гурвица), фазовая постоянная фазового корректора изменяется от 0 до $n\pi$

$$\int_0^{\infty} t_{гр}(\omega) d\omega = B(\infty) - B(0) = 2 \frac{n}{2} \pi = n\pi. \quad (18.12)$$

Замечание. Так как фазовая постоянная $B(\omega)$ возрастает с частотой, то групповое время прохождения не может быть отрицательным.

Фазовое звено 1-го порядка

Замечание. Фазовые звенья 1-го и 2-го порядка реализуются мостовыми схемами, поскольку мостовая схема имеет постоянное входное сопротивление и изменяющуюся фазовую характеристику при изменении частоты.

Обобщенная электрическая схема фазового звена 1-го порядка в виде мостового четырехполюсника представлена на рис. 18.8 а.

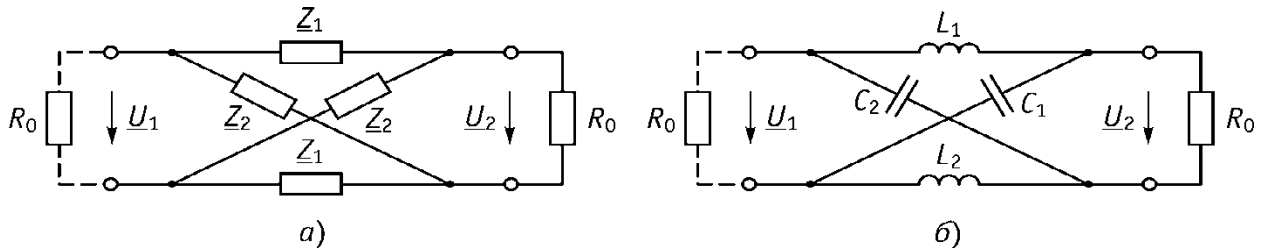


Рис. 18.8

Цель анализа: определить передаточную функцию, фазовую постоянную, групповое время прохождения, параметры двухполюсников $\underline{Z}_1$ и $\underline{Z}_2$, элементы схемы.

Анализ

1. Определяем передаточную функцию фазового звена 1-го порядка

$$H(p) = \frac{-p + \delta_1}{p + \delta_1}. \quad (18.13)$$

2. Определяем комплексную передаточную функцию

$$H(j\omega) = \frac{-j\omega + \delta_1}{j\omega + \delta_1}. \quad (18.14)$$

3. Определяем фазовую постоянную

$$B(\omega) = 2 \arctg(\omega/\delta_1). \quad (18.15)$$

4. Определяем групповое время прохождения

$$t_{\text{гр}}(\omega) = \frac{dB(\omega)}{d\omega} = \frac{2\delta_1}{\omega^2 + \delta_1^2}. \quad (18.16)$$

5. Определяем параметры двухполюсников $\underline{Z}_1$ и $\underline{Z}_2$

$$\text{а) } Z_1(j\omega) \cdot Z_2(j\omega) = R_0^2,$$

$$\text{б) } Z_1(p) = R_0 \frac{1 - H(p)}{1 + H(p)} = R_0 \frac{1 - \frac{-p + \delta_1}{p + \delta_1}}{1 + \frac{-p + \delta_1}{p + \delta_1}} = \frac{R_0}{\delta_1} p \rightarrow j\omega L_1 \rightarrow L_1 = \frac{R_0}{\delta_1}, \quad (18.17)$$

$$\text{в) } Z_2(p) = \frac{R_0^2}{Z_1(p)} = R_0^2 \frac{\delta_1}{R_0 p} \rightarrow \frac{1}{j\omega C_1} \rightarrow C_1 = \frac{1}{R_0 \delta_1},$$

$$\text{г) } \delta_1 = R_0/L_1.$$

6. Электрическая схема фазового звена 1-го порядка имеет вид, представленный на рис. 18.8 б.

7. Графики фазовой постоянной ($B(\omega) = 2 \arctg(\omega L_1 / R_0)$) и группового времени прохождения

$$t_{\text{гр}} = \frac{dB(\omega)}{d\omega} = \frac{2R_0 L_1}{R_0^2 + (\omega L_1)^2} \quad (18.18)$$

представлены на рис. 18.9 а и б, соответственно.

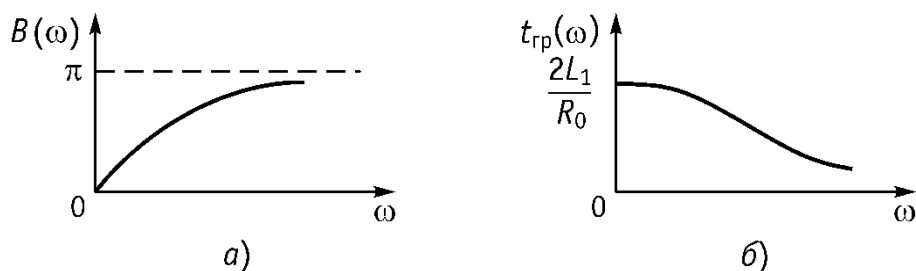


Рис. 18.9

8. Максимальное значение фазы фазового звена 1-го порядка равно π

$$\int_0^{\infty} t_{\text{гр}}(\omega) d\omega = \pi. \quad (18.19)$$

Замечание. Фазовое звено 1-го порядка может быть реализовано на основе ARC цепей (рис.18.10). Передаточная функция этого фазового звена имеет вид

$$H(p) = \frac{1 - pR_1C}{1 + pR_1C} = \frac{-p + 1/(R_1C)}{p + 1/(R_1C)} = \frac{-p + \delta_1}{p + \delta_1}. \quad (18.20)$$

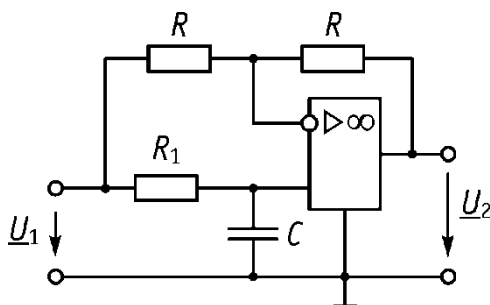


Рис. 18.10

Фазовые звенья 2-го порядка

Обобщенная электрическая схема фазового звена 2-го порядка в виде мостового четырехполюсника представлена на рис. 18.8 а.

Схема электрическая принципиальная фазового звена 2-го порядка приведена на рис. 18.11.

Цель анализа: найти передаточную функцию $H(p)$, элементы схемы, фазовую постоянную, ГВП.

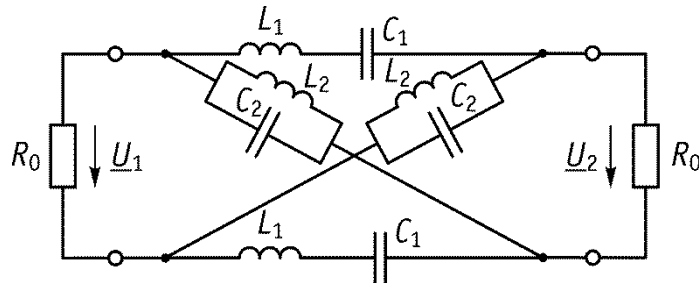


Рис. 18.11

Анализ

1. Определяем передаточную функцию $H(p)$

$$H(p) = -\frac{p^2 - \alpha p + \beta}{p^2 + \alpha p + \beta} = -\frac{p^2 - p\omega_0/Q_n + \omega_0^2}{p^2 + p\omega_0/Q_n + \omega_0^2} = -\frac{R_0 - z_1(p)}{R_0 + z_1(p)}. \quad (18.21)$$

2. Определяем параметры двухполюсников $z_1(p)$ и $z_2(p)$, используя выражения

$$z_1(p) = R_0 \frac{1 - H(p)}{1 + H(p)} = R_0 \frac{p^2 + \omega_0^2}{\frac{\omega_0}{Q_n} R_0 p}, \quad (18.22)$$

$$z_2(p) = \frac{R_0^2}{z_1(p)}. \quad (18.23)$$

3. Определяем фазовую постоянную

$$B(\omega) = \pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{\omega^2 - \beta}{\alpha \omega} = \pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{Q_n (\omega^2 - \omega_0^2)}{\omega_0 \omega}. \quad (18.24)$$

4. Определяем групповое время прохождения

$$t_{\text{гр}}(\omega) = \frac{dB(\omega)}{d\omega} = \frac{2\alpha(\beta + \omega^2)}{(\omega^2 - \beta)^2 + \alpha^2 \omega^2} = 2 \frac{Q_n \omega_0 (\omega^2 + \omega_0^2)}{Q_n^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^2 \omega^2}. \quad (18.25)$$

5. Строим графики фазовой постоянной и ГВП (рис. 18.12 а и б).

6. Максимальное изменение фазы

$$\varphi = \int_0^\infty t_{\text{гр}}(\omega) d\omega = 2\pi. \quad (18.26)$$

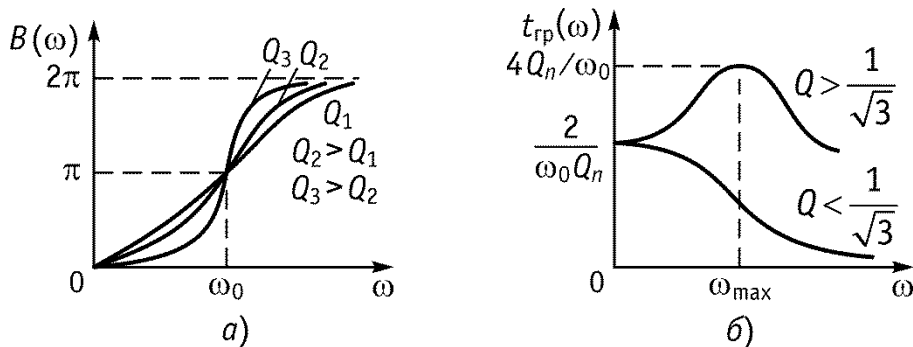


Рис. 18.12

ТЕМА 19. Линейные электрические цепи с распределенными параметрами

Лекция 34

Однородная длинная линия. Телеграфные и волновые уравнения длинной линии. Параметры линии и волны

Электрической цепью с распределенными параметрами называется электрическая цепь, у которой геометрические размеры соизмеримы с длиной волны ($l_x \sim \lambda, l_y \sim \lambda, l_z \sim \lambda$) и у которой индуктивность, емкость, диссипативные сопротивление и проводимость распределены по длине.

Условие квазистационарности – условие вида $l \ll \lambda$.

Замечание. Если геометрические размеры электрической цепи намного меньше длины волны λ ($l_x \ll \lambda, l_y \ll \lambda, l_z \ll \lambda$), то такая электрическая цепь называется **цепью с сосредоточенными параметрами**.

Длинной линией называется электрическая цепь, у которой только один из геометрических размеров не удовлетворяет условию стационарности ($l \ll \lambda$), например, размер L_z – длина линии.

Однородные и неоднородные длинные линии

Однородные длинные линии – это линии, у которых параметры неизменны при изменении расстояния вдоль линии.

Неоднородные длинные линии – это линии, у которых параметры изменяются с изменением расстояния вдоль линии.

Первичные параметры однородной длинной линии

Для количественной оценки распределенных параметров используют понятие первичных параметров линии, которые равны значениям соответствующих распределенных параметров, измеренных на отрезке линии единичной длины (1 км для линии проводной связи и 1 м для линии радиосвязи).

К первичным параметрам относятся:

- диссипативное сопротивление R ;
- диссипативная проводимость G ;
- индуктивность L ;
- емкость C .

Телеграфные уравнения однородной длинной линии

При произвольном воздействии на входе однородной длинной линии напряжения и токи в ней изменяются как во времени, так и в пространстве и описываются с помощью дифференциальных уравнений в частных производных.

Постановка задачи. Пусть имеется однородная длинная линия с длиной l , и известны первичные параметры R, G, L, C . Пусть ко входу линии длиной l подключен источник напряжения с внутренним сопротивлением $Z_{\text{а}}$, а к выходу линии подключена нагрузка $Z_{\text{н}}$. Требуется найти дифференциальные уравнения длинной линии в частных производных.

Порядок анализа

1. Выделим отрезок линии длиной Δx и представим эквивалентную схему длинной линии с выделенным участком Δx на расстоянии x от генератора (рис. 19.1).

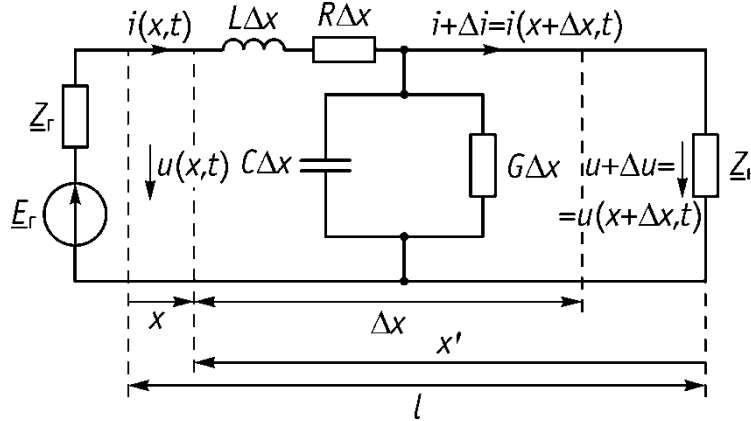


Рис. 19.1

2. Определим изменение тока Δi и напряжения Δu на выходе линии длиной Δx , используя ЗТК и ЗНК. Пренебрегая членами 2-го порядка, имеем

$$\begin{aligned} -\Delta u &= L\Delta x \frac{\Delta i}{\Delta t} + R\Delta x \cdot i, \\ -\Delta i &= G\Delta x \cdot u + C\Delta x \frac{\Delta u}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (19.1)$$

3. Разделим обе части уравнения на Δx и перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ и $\Delta x \rightarrow 0$, получим соответственно 1-е и 2-е телеграфные уравнения длинной линии

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t} + R \cdot i, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G \cdot u + C \frac{\partial u}{\partial t}. \end{cases} \quad (19.2)$$

Замечание. Для установившегося гармонического колебания телеграфные уравнения имеют вид

$$\begin{cases} -\frac{d\underline{U}}{dx} = j\omega L \underline{I} + R \underline{I} = \underline{I} (R + j\omega L), \\ -\frac{d\underline{I}}{dx} = j\omega C \underline{U} + G \underline{U} = \underline{U} (G + j\omega C). \end{cases} \quad (19.3)$$

Волновое уравнение однородной длинной линии

$$\begin{cases} \frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} + \underline{\gamma}^2 \underline{U} = 0, \\ \frac{d^2 \underline{I}}{dx^2} + \underline{\gamma}^2 \underline{I} = 0, \end{cases} \quad (19.4)$$

где $\underline{\gamma} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta$ – коэффициент распространения длинной линии; α – коэффициент ослабления длинной линии [Нп/км], [Нп/м] или [ДБ/км], или [ДБ/м]; β – коэффициент фазы [рад/км], [рад/м].

Решение волновых уравнений. Уравнение передачи длинной линии

1. Поскольку волновые уравнения – линейные дифференциальные однородные уравнения 2-го порядка, то их решение в произвольном сечении x находится в виде

$$\begin{cases} \underline{U}_x = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}, \\ \underline{I}_x = \underline{A}_3 e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{A}_4 e^{\underline{\gamma}x}, \end{cases} \quad (19.5)$$

где $\underline{A}_1, \underline{A}_2, \underline{A}_3, \underline{A}_4$ – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий, в качестве которых обычно используют напряжение и ток, либо в начале линии ($\underline{U}_1$ и $\underline{I}_1$ при $x = 0$), либо ток и напряжение в конце линии ($\underline{U}_2$ и $\underline{I}_2$ при $x = l$). Решение для тока, как правило, выражают через найденное напряжение

$$\underline{I}_x = (\underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} - \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}) / \underline{Z}_B, \quad (19.6)$$

где $\underline{Z}_B$ – волновое сопротивление длинной линии определяется по формуле

$$\underline{Z}_B = \sqrt{(R + j\omega L) / (G + j\omega C)}, \text{ (Ом)}. \quad (19.7)$$

Если $\omega = 0$, то $\underline{Z}_B = \sqrt{R/G}$. Если $\omega = \infty$, то $\underline{Z}_B = \sqrt{L/C}$.

Определяем постоянные интегрирования из системы уравнений для напряжения и тока при $x = 0$

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_1 + \underline{A}_2, \\ \underline{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_B} (\underline{A}_1 - \underline{A}_2), \end{cases} \quad (19.8)$$

откуда $\underline{A}_1 = \frac{\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_B}{2}$; $\underline{A}_2 = \frac{\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_B}{2}$, где $\underline{U}_1 = \underline{U}_x|_{x=0}$ и $\underline{I}_1 = \underline{I}_x|_{x=0}$.

2. Зная постоянные интегрирования, запишем уравнения для тока и напряжения в любом сечении x

$$\begin{cases} \underline{U}_x = \frac{\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_B}{2} e^{-\underline{\gamma}x} + \frac{\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_B}{2} e^{\underline{\gamma}x}, \\ \underline{I}_x = \frac{\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_B}{2 \underline{Z}_B} e^{-\underline{\gamma}x} - \frac{\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_B}{2 \underline{Z}_B} e^{\underline{\gamma}x}. \end{cases} \quad (19.9)$$

Замечание 1. Уравнение передачи можно записать в гиперболической форме

$$\begin{cases} \underline{U}_x = \underline{U}_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma}x - \underline{Z}_B \underline{I}_1 \operatorname{sh} \underline{\gamma}x, \\ \underline{I}_x = \underline{I}_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma}x - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_B} \operatorname{sh} \underline{\gamma}x. \end{cases} \quad (19.10)$$

Замечание 2. Уравнения передачи можно записать в начале линии ($\underline{U}_x|_{x=0} = \underline{U}_1, \underline{I}_x|_{x=0} = \underline{I}_1$) через напряжение $\underline{U}_2$ и ток $\underline{I}_2$ в конце линии

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \underline{I}_2 \underline{Z}_B \operatorname{sh} \underline{\gamma} l, \\ \underline{I}_1 = \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l. \end{cases} \quad (19.11)$$

Замечание 3. Уравнение передачи можно записать в конце линии ($\underline{U}_x|_{x=l} = \underline{U}_2, \underline{I}_x|_{x=l} = \underline{I}_2$) через напряжение $\underline{U}_1$ и ток $\underline{I}_1$ в начале линии

$$\begin{cases} \underline{U}_2 = \underline{U}_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l - \underline{I}_1 \underline{Z}_B \operatorname{sh} \underline{\gamma} l, \\ \underline{I}_2 = \underline{I}_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_B} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l. \end{cases} \quad (19.12)$$

Волновые процессы в однородной длинной линии

Изучение волновых процессов основывается на рассмотрении трех основных волн: бегущих, стоячих, смешанных.

В линиях с потерями ($\alpha \neq 0$) имеются в общем случае бегущие затухающие прямые и обратные волны и их суперпозиция.

В линиях без потерь имеются в общем случае бегущие, стоячие и смешанные волны.

Бегущая волна – волна, перемещающаяся вдоль линии.

Прямая бегущая волна – волна, перемещающаяся от начала к концу линии.

Обратная бегущая волна – волна, перемещающаяся от конца к началу линии.

Падающая и отраженные волны

Падающая волна – прямая бегущая волна. **Отраженная волна** – частный случай обратной бегущей волны, возникающей в результате неравенства волнового сопротивления линии и сопротивления нагрузки ($\underline{Z}_B \neq \underline{Z}_H$).

Коэффициент отражения по напряжению (току) – отношение комплексной амплитуды отраженной волны напряжения (тока) к комплексной амплитуде падающей волны напряжения (тока). Коэффициенты можно определить в начале линии и в конце линии. Коэффициенты отражения по напряжению и по току в начале линии

$$\underline{\Gamma}_{1u} = \frac{\underline{U}_{1\text{отр}}}{\underline{U}_{1\text{пад}}} = \underline{\Gamma}_u|_{x=0} = \frac{\underline{Z}_\Gamma - \underline{Z}_B}{\underline{Z}_\Gamma + \underline{Z}_B}; \quad \underline{\Gamma}_{1i} = -\underline{\Gamma}_{1u}; \quad (19.13)$$

коэффициенты отражения по напряжению и по току в конце линии

$$\underline{\Gamma}_{2u} = \frac{\underline{U}_{2\text{отр}}}{\underline{U}_{2\text{пад}}} = \underline{\Gamma}_u|_{x=l} = \frac{\underline{Z}_H - \underline{Z}_B}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_B}; \quad \underline{\Gamma}_{2i} = -\underline{\Gamma}_{2u}. \quad (19.14)$$

Коэффициент стоячей волны напряжения

$$K_{\text{стн}} = \frac{1 + |\underline{\Gamma}_H|}{1 - |\underline{\Gamma}_H|}. \quad (19.15)$$

Коэффициент бегущей волны напряжения

$$K_{\text{БВ}} = \frac{1 - |\underline{\Gamma}_H|}{1 + |\underline{\Gamma}_H|}, \quad (0 \leq K_{\text{БВ}} \leq 1). \quad (19.16)$$

Стоячие и смешанные волны – это волновые процессы в длинной линии без потерь при наложении падающей и отраженной волн напряжения (тока) соответственно с одинаковыми и с различными амплитудами.

Замечание. Для длинной линии с потерями понятие стоячей и смешанной волн не существует.

Стоячие волны возникают в длинной линии без потерь при условии, когда к длинной линии подключена нагрузка, модуль коэффициента отражения которой равен 1, при этом амплитуды падающей и отраженной волн напряжения (тока) переносят одинаковую мощность в прямом и обратном направлениях и энергия в нагрузке не потребляется.

Стоячие волны напряжения и тока в длинной линии без потерь в режиме холостого хода ($Z_H = \infty$) ($I_2 = 0$).

Найдем уравнения распределения амплитуд и фаз стоячей волны напряжения и тока, используя уравнения напряжения и тока в сечении x' ($\gamma = j\beta$)

$$\underline{U}_{x'} = \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_B}{2} e^{j\beta x'} + \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_B}{2} e^{-j\beta x'} = \underline{U}_{2\text{пад}} e^{j\beta x'} + \underline{U}_{2\text{отр}} e^{-j\beta x'} = \underline{U}_2 \cos \beta x', \quad (19.17)$$

$$\underline{I}_{x'} = \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_B}{2 \underline{Z}_B} e^{j\beta x'} - \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_B}{2 \underline{Z}_B} e^{-j\beta x'} = \underline{I}_2 \cos(\beta x') + j \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} \sin(\beta x') = j \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} \sin(\beta x'). \quad (19.18)$$

Графики изменения фазы и распределения амплитуд стоячих волн напряжения и тока приведены на рис. 19.2.

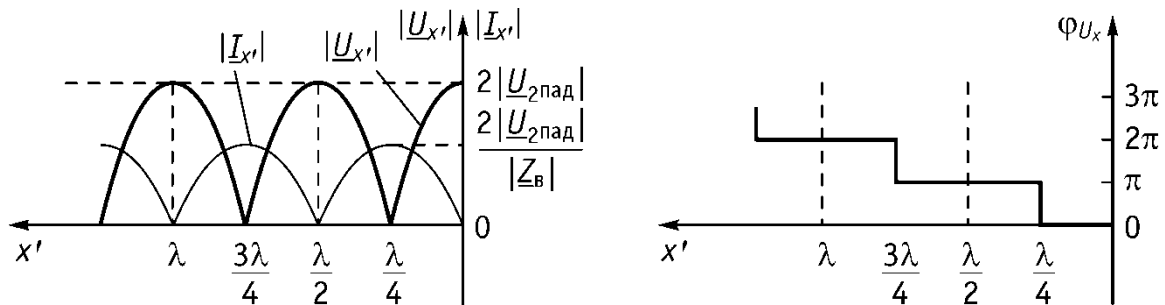


Рис. 19.2

Из графика видно, что амплитуды стоячих волн напряжения и тока принимают соответственно максимальные значения, равные $2|\underline{U}_{2\text{пад}}|$, $2|\underline{I}_{2\text{пад}}| = 2|\underline{U}_{2\text{пад}} / \underline{Z}_B|$, либо минимальные значения, равные 0.

Нулевые и максимальные значения напряжения (тока) называются соответственно **узлами и пучностями стоячей волны напряжения (тока)**. При этом заметим, что узлы напряжения совпадают с пучностями тока и наоборот.

Образование пучностей и нулей обусловлено тем, что в соответствующих сечениях линии, падающие и отраженные волны напряжения (тока) совпадают по фазе или находятся в противофазе.

Стоячие волны напряжения и тока в длинной линии без потерь в режиме короткого замыкания ($Z_H = 0$)

В основу анализа положены уравнения вида

$$\begin{aligned}\underline{U}_{x'} &= \underline{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x' + \underline{I}_2 \underline{Z}_B \operatorname{sh} \gamma x', \\ \underline{I}_{x'} &= \underline{I}_2 \operatorname{ch} \gamma x' + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} \operatorname{sh} \gamma x',\end{aligned}\quad (19.19)$$

в которых учтем, что $\gamma = j\beta$, $\alpha = 0$ и учтем, что в режиме короткого замыкания $\underline{U}_2 = 0$, тогда

$$\begin{aligned}\underline{U}_{x' \text{ КЗ}} &= j \underline{I}_2 \underline{Z}_B \sin \beta x', \\ \underline{I}_{x' \text{ КЗ}} &= \underline{I}_2 \cos \beta x' .\end{aligned}\quad (19.20)$$

Ток и напряжение в линии без потерь в режиме короткого замыкания имеют вид

$$\begin{aligned}u(x', t) &= |\underline{I}_2| \underline{Z}_B \sin \beta x' \sin(\omega t + \varphi_{I_2} + \pi/2), \\ i(x', t) &= |\underline{I}_2| \cos \beta x' \sin(\omega t + \varphi_{I_2}).\end{aligned}\quad (19.21)$$

Входное сопротивление длинной линии без потерь

Входное сопротивление длинной линии без потерь определяем из уравнения вида

$$\underline{Z}_{\text{BX}} = \underline{Z}_B \frac{\underline{Z}_2 + j \underline{Z}_B \operatorname{tg} \gamma x'}{\underline{Z}_B + j \underline{Z}_2 \operatorname{tg} \gamma x'} .\quad (19.22)$$

Входное сопротивление длинной линии без потерь в режиме короткого замыкания и холостого хода

В режиме короткого замыкания $\underline{Z}_2 = 0$, тогда

$$\underline{Z}_{\text{BX КЗ}} = j \underline{Z}_B \operatorname{tg} \beta x' .\quad (19.23)$$

В режиме холостого хода $\underline{Z}_2 = \infty$, тогда

$$\underline{Z}_{\text{BX ХХ}} = -j \underline{Z}_B \operatorname{ctg} \beta x' .\quad (19.24)$$

Параметры линии и волны в линии без потерь

1. Фазовая скорость волны в длинной линии без потерь

$$V_\Phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}, [\text{м/с}],\quad (19.25)$$

где c – скорость света в вакууме; ϵ , μ – соответственно относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости материала.

2. Постоянная (коэффициент) распространения

$$\gamma = j\beta .\quad (19.26)$$

3. Коэффициент фазы

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} .\quad (19.27)$$

4. Фазовая и групповая скорости равны

$$V_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} = V_{\text{ф}} = \frac{\omega}{\beta}. \quad (19.28)$$

5. Длина волны

$$\lambda = V_{\text{оп}} T = V_{\text{оп}} / f. \quad (19.29)$$

Элементы и устройства на отрезках длинной линии

1. Индуктивный элемент (рис. 19.3)

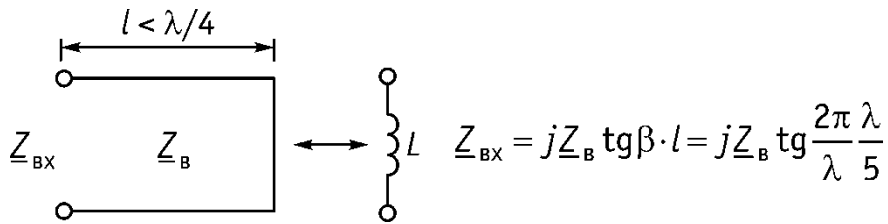


Рис. 19.3

2. Емкостной элемент (рис. 19.4)

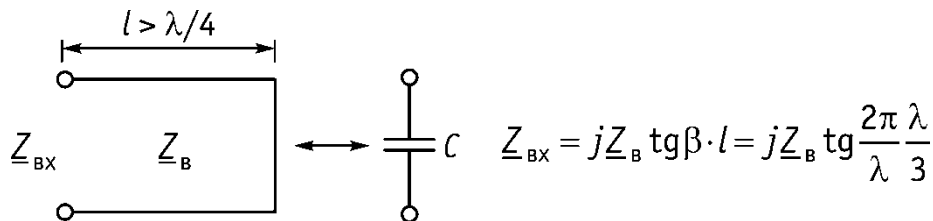


Рис. 19.4

3. Параллельный колебательный контур (рис. 19.5)

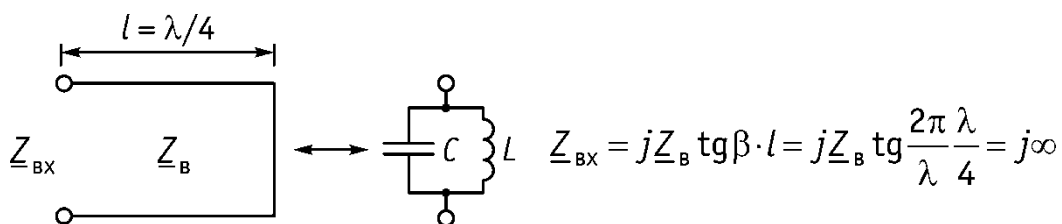


Рис. 19.5

4. Последовательный колебательный контур (рис. 19.6)

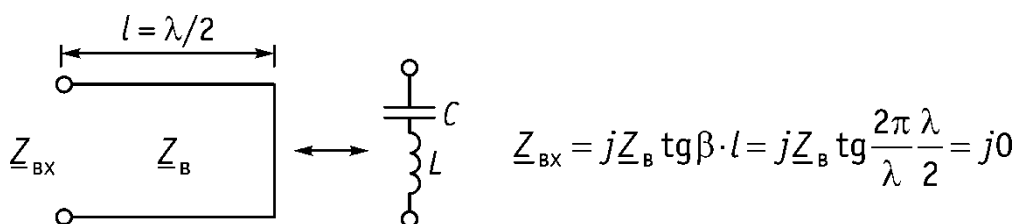


Рис. 19.6

Примеры и задачи

Пример 1. Заданы первичные параметры двухпроводной линии на частоте $f = 800$ Гц: $R = 38,4$ Ом/км, $L = 88,4 \cdot 10^{-4}$ Гн/км, $C = 5,12 \cdot 10^{-9}$ Ф/км, $G = 5 \cdot 10^{-8}$ См/км. Определить для линии длиной 38 км: 1) волновое сопротивление $\underline{Z}_в$; 2) коэффициенты распространения, ослабления и фазы $\underline{\gamma}$, α , β ; 3) фазовую скорость V_ϕ ; 4) длину волны λ ; 5) отношения амплитуд напряжения и тока падающей волны в конце линии к амплитудам напряжения и тока падающей волны в начале линии $U_{2\text{пад}}/U_{1\text{пад}}$, $I_{2\text{пад}}/I_{1\text{пад}}$ при нагрузке линии на сопротивлении, равное волновому; 6) время прохождения сигнала расстояния 38 км.

Решение

1. Волновое сопротивление определяем по формуле (19.7)

$$\underline{Z}_в = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{38,4 + j2\pi 800 \cdot 88,4 \cdot 10^{-4}}{0,05 \cdot 10^{-6} + j2\pi 800 \cdot 5,12 \cdot 10^{-9}}} = 1510 e^{-j20^\circ 21'} \text{ Ом.}$$

Реальная и мнимая части сопротивления равны $R_в = 1415$ Ом, $X_в = 525$ Ом.

2. Коэффициент распространения определяем по формуле $\underline{\gamma} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{58,8 e^{j49^\circ 10'} \cdot 10^{-6} 25,7 e^{j89^\circ 52'}} = 38,8 \cdot 10^{-3} e^{j69^\circ 31'} \text{ км}^{-1},$$

отсюда коэффициенты ослабления и фазы равны:

$$\alpha = 38,8 \cdot 10^{-3} \cos 69^\circ 31' = 0,12 \text{ дБ/км}; \beta = 38,8 \cdot 10^{-3} \sin 69^\circ 31' = 0,12 \text{ рад/км}.$$

3. Фазовую скорость определяем по формуле (19.25)

$$V_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 800}{36,4 \cdot 10^{-3}} = 138000 \text{ км/с.}$$

4. Длину волны определяем по формуле (19.27)

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{6,28}{36,4 \cdot 10^{-3}} = 172,6 \text{ км.}$$

5. Отношение амплитуд напряжений и токов для падающей волны в конце и начале линии при согласованной нагрузке определяем по формулам (19.11), (19.12)

$$\frac{U_{2\text{пад}}}{U_{1\text{пад}}} = \frac{I_{2\text{пад}}}{I_{1\text{пад}}} = |e^{\underline{\gamma}l}| = e^{-\alpha l} = e^{-13,6 \cdot 10^{-3} \cdot 38} = 0,597.$$

6. Время задержки сигнала при прохождении расстояния 38 км определяем по формуле

$$t_3 = \frac{L}{V_\phi} = \frac{38}{138000} = 2,75 \cdot 10^{-4} \text{ с.}$$

Пример 2. Заданы первичные параметры коаксиальной линии (коаксиального кабеля) на частоте $f = 230$ кГц: $R = 95,5$ Ом/км, $L = 0,76 \cdot 10^{-3}$ Гн/км, $C = 27,5 \cdot 10^{-9}$ Ф/км, $G = 610 \cdot 10^{-6}$ См/км. Определить: 1) волновое сопротивление $\underline{Z}_B$; 2) коэффициенты распространения, ослабления и фазы $\underline{\gamma}$, α , β ; 3) длину волны λ ; 4) фазовую скорость V_ϕ .

Решение

1. Волновое сопротивление определяем по формуле (19.7)

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{95,5 + j2\pi 220 \cdot 10^3 \cdot 0,76 \cdot 10^{-3}}{610 \cdot 10^{-6} + j2\pi 220 \cdot 10^3 \cdot 27,5 \cdot 10^{-9}}} = 166e^{-j2^\circ 9'} \text{ Ом.}$$

2. Определяем коэффициент распространения

$$\underline{\gamma} = \sqrt{1050e^{j84^\circ 47'} 38000 \cdot 10^{-6} e^{j89^\circ 5'}} = 6,32e^{j86^\circ 56'} \text{ км}^{-1},$$

отсюда коэффициенты ослабления и фазы равны:

$$\alpha = 6,32 \cos 86^\circ 56' = 3 \text{ дБ/км}; \beta = 6,32 \sin 86^\circ 56' = 6,3 \text{ рад/км.}$$

3. Длину волны определяем по формуле (19.27)

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{6,28}{6,3} = 0,995 \text{ км.}$$

4. Фазовую скорость определяем по формуле (19.25)

$$V_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 220 \cdot 10^3}{6,3} = 219400 \text{ км/с.}$$

Пример 3. Заданы первичные параметры двухпроводной линии на частоте $f = 800$ Гц: $R = 38,4$ Ом/км, $L = 88,4 \cdot 10^{-4}$ Гн/км, $C = 5,12 \cdot 10^{-9}$ Ф/км, $G = 5 \cdot 10^{-8}$ См/км. Линия нагружена на сопротивление $\underline{Z}_H$, равное волновому (пример 1). Длина линии 38 км. Напряжение на входе линии $U_1 = 10$ В, частота $f = 800$ Гц. Определить: 1) коэффициент отражения по напряжению от конца линии $\underline{\Gamma}_{2u}$ ($\underline{\Gamma}_{Hu}$); 2) входное сопротивление нагруженной линии $\underline{Z}_{Bx}$; 3) ток в начале линии I_1 ; 4) напряжение $\underline{U}_2$ и ток I_2 на нагрузке; 5) мощность, подводимую к линии и мощность, расходуемую в нагрузке.

Решение

1. Коэффициент отражения от конца линии $\underline{\Gamma}_{2u}$ ($\underline{\Gamma}_{Hu}$) находим по формуле (19.14)

$$\underline{\Gamma}_{2u} = \frac{\underline{Z}_H - \underline{Z}_B}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_B} = 0,0.$$

2. Входное сопротивление линии определяем по формуле (19.22), полагая, что $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_H = \underline{Z}_B$ и $x' = 0$

$$\underline{Z}_{Bx} = \frac{\underline{U}_1}{I_1} = \underline{Z}_B = 1510e^{-j20^\circ 21'} \text{ Ом.}$$

3. Ток в начале линии $\underline{I}_1$ определяем по формуле (19.11), полагая $x = 0$, $\underline{U}_x = \underline{U}_1 = 10 \text{ В}$, $\underline{I}_x = \underline{I}_1$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_B} = \frac{10}{1510e^{-j20^\circ 21'}} = 6,62 \cdot 10^{-3} e^{j20^\circ 21'} \text{ А.}$$

4. Напряжение $\underline{U}_2$ и ток $\underline{I}_2$ на нагрузке найдем по формулам (19.12), полагая, что $x = L$, $\underline{U}_L = \underline{U}_2$, $\underline{I}_L = \underline{I}_2$, и что при $\underline{Z}_H = \underline{Z}_B$ нет отраженной волны

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{\text{пад}} e^{-\gamma l} = 10e^{13,6 \cdot 10^{-3} \cdot 38} e^{-j13,6 \cdot 10^{-3} \cdot 38} = 6,03e^{-j79^\circ 21'},$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} = \frac{6,03e^{-j79^\circ 21'}}{1510e^{-j20^\circ 21'}} = 4 \cdot 10^{-3} e^{j59^\circ}.$$

5. Мощности, расходуемые в нагрузке и подводимые к линии, равны

$$P_H = \operatorname{Re}(\underline{U}_2 \underline{I}_2^*) = \operatorname{Re}(6,03e^{-j79^\circ 21'} \cdot 4 \cdot 10^{-3} e^{j59^\circ}) = 22,6 \text{ мВт},$$

$$P_1 = \operatorname{Re}(\underline{U}_1 \underline{I}_1^*) = \operatorname{Re}(10 \cdot 6,62 \cdot 10^{-3} e^{-j20^\circ 21'}) = 62 \text{ мВт}.$$

Пример 4. Вторичные параметры двухпроводной линии на частоте $f = 800$ Гц равны: $\underline{Z}_B = 1510e^{-j20^\circ 21'}$ Ом, $\alpha = 13,6$ мНп/км, $\beta = 36,4$ мрад/км. Длина линии $L = 38$ км. На конце линии подключена нагрузка с сопротивлением $\underline{Z}_H = 1355e^{j21,4^\circ}$, на вход линии подано напряжение $u(t) = 10 \sin \omega t$. Определить: 1) напряжение и ток на нагрузке; 2) ток в начале линии; 3) входное сопротивление; 4) коэффициент отражения от конца линии.

Решение

1. Напряжение на нагрузке определяем по формуле (19.11) с учетом того, что ток в нагрузке равен $\underline{I}_2 = \underline{U}_2 / \underline{Z}_H$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \underline{I}_2 \underline{Z}_B \operatorname{sh} \gamma l = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_H} \underline{Z}_B \operatorname{sh} \gamma l,$$

откуда

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 / \left(\operatorname{ch} \gamma l + \frac{\underline{Z}_B}{\underline{Z}_H} \operatorname{sh} \gamma l \right) = 10 / \left(\operatorname{ch}(\alpha l + j\beta l) + \frac{1510e^{-j20^\circ 21'}}{1355e^{j21,4^\circ}} \operatorname{sh}(\alpha l + j\beta l) \right) =$$

$$= 10 / \left(\operatorname{ch}(0,505 + j1,385) + \frac{1510e^{-j20^\circ 21'}}{1355e^{j21,4^\circ}} \operatorname{sh}(0,505 + j1,385) \right) =$$

$$= 10 / \left(0,56e^{j68,05^\circ} + \frac{1510e^{-j20^\circ 21'}}{1355e^{j21,4^\circ}} 1,114e^{j85^\circ} \right) \text{ В.}$$

Ток в нагрузке равен

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_H} = \frac{5,78e^{-j52,25^\circ}}{1355e^{j21,4^\circ}} = 4,27e^{-j73,3^\circ} \text{ мА}.$$

2. Определяем ток в начале линии

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l = 4,27 e^{-j73,3^\circ} 0,56 e^{j68,05^\circ} + \frac{5,78 e^{-j52,25^\circ}}{1510 e^{-j20,35^\circ}} 1,114 e^{j85^\circ} = 5,78 e^{j32,83^\circ} \text{ мА.}$$

3. Входное сопротивление линии определяем из соотношения

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{10}{5,78 \cdot 10^{-3} e^{-j52,83^\circ}} = 1732 e^{-j52,83^\circ} \text{ Ом.}$$

4. Коэффициент отражения от конца линии $\underline{\Gamma}_{2u}$ ($\underline{\Gamma}_{\text{ну}}$) находим по формуле

$$\underline{\Gamma}_{2u} = \frac{\underline{Z}_{\text{н}} - \underline{Z}_B}{\underline{Z}_{\text{н}} + \underline{Z}_B} = \frac{1355 e^{j21,4^\circ} - 1510 e^{-j20^\circ 21'}}{1355 e^{j21,4^\circ} + 1510 e^{-j20^\circ 21'}} = 0,385 e^{-j99,26^\circ}.$$

Пример 5. Задана линия передачи, первичные параметры которой на частоте $f = 100$ МГц равны: $R = 0,0$, $L = 1,57 \cdot 10^{-6}$ Гн/м, $C = 7,1 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $G = 0,0$. Определить: 1) волновое сопротивление; 2) коэффициенты распространения, ослабления и фазы; 3) входные сопротивления отрезков линии длиной $\lambda/8$, $\lambda/4$, $3\lambda/8$, $\lambda/2$, $5\lambda/8$ при холостом ходе и коротком замыкании; 4) представить эквивалентные схемы отрезков линии длиной $\lambda/8$, $\lambda/4$, $3\lambda/8$, $\lambda/2$, $5\lambda/8$ при коротком замыкании.

Решение

1. Волновое сопротивление определяем по формуле

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{1,57 \cdot 10^{-6}}{7,1 \cdot 10^{-12}}} = 470 \text{ Ом.}$$

2. Коэффициенты распространения, ослабления и фазы определяем по формуле

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(j\omega L)(j\omega C)} = j\sqrt{\omega^2 LC} = j\sqrt{10^{16} 1,57 \cdot 10^{-6} 7,1 \cdot 10^{-12}} = \alpha + j\beta = 0,0 + j2,1,$$

откуда

$$\alpha = 0,0 ; \beta = 2,1 \text{ рад/м.}$$

3. Входные сопротивления отрезка линии длиной $\lambda/8$, $\lambda/4$, $3\lambda/8$, $\lambda/2$, $5\lambda/8$ при коротком замыкании и холостом ходе определяем

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{вх КЗ}} &= jZ_B \operatorname{tg} \beta x' = j470 \operatorname{tg}(\pi/4) = j470 \text{ Ом,} \\ \underline{Z}_{\text{вх ХХ}} &= -jZ_B \operatorname{ctg} \beta x' = -j470 \operatorname{ctg}(\pi/4) = -j470 \text{ Ом,} \\ \underline{Z}_{\text{вх КЗ}} &= jZ_B \operatorname{tg} \beta x' = j470 \operatorname{tg}(\pi/2) = j\infty \text{ Ом,} \\ \underline{Z}_{\text{вх ХХ}} &= -jZ_B \operatorname{ctg} \beta x' = -j470 \operatorname{ctg}(\pi/2) = -j0,0 \text{ Ом,} \\ \underline{Z}_{\text{вх КЗ}} &= jZ_B \operatorname{tg} \beta x' = j470 \operatorname{tg}(3\pi/4) = -j470 \text{ Ом,} \\ \underline{Z}_{\text{вх ХХ}} &= -jZ_B \operatorname{ctg} \beta x' = -j470 \operatorname{ctg}(3\pi/4) = j470 \text{ Ом,} \\ \underline{Z}_{\text{вх КЗ}} &= jZ_B \operatorname{tg} \beta x' = j470 \operatorname{tg}(\pi) = -j0,0 \text{ Ом,} \\ \underline{Z}_{\text{вх ХХ}} &= -jZ_B \operatorname{ctg} \beta x' = -j470 \operatorname{ctg}(\pi) = j\infty \text{ Ом,} \end{aligned}$$

$$\underline{Z}_{\text{ВХ КЗ}} = jZ_{\text{В}} \operatorname{tg} \beta x' = j470 \operatorname{tg} (5\pi/4) = j470 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{\text{ВХ ХХ}} = -jZ_{\text{В}} \operatorname{ctg} \beta x' = -j470 \operatorname{ctg} (5\pi/4) = -j470 \text{ Ом}.$$

4. Представим эквивалентные схемы отрезков линии длиной $\lambda/8$, $\lambda/4$, $3\lambda/8$, $\lambda/2$, $5\lambda/8$ при коротком замыкании, используя результаты пункта 3 (рис. 19.7).

Пример 6. Задана линия передачи, первичные параметры которой на частоте $f = 100$ МГц равны: $R = 0,0$, $L = 1,57 \cdot 10^{-6}$ Гн/м, $C = 7,1 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $G = 0,0$. Определить: 1) действующее значение напряжения в конце линии; 2) комплексное действующее значение тока в начале линии; 3) написать уравнения мгновенных значений напряжения и тока вдоль линии; 4) определить коэффициенты отражения и бегущей волны.

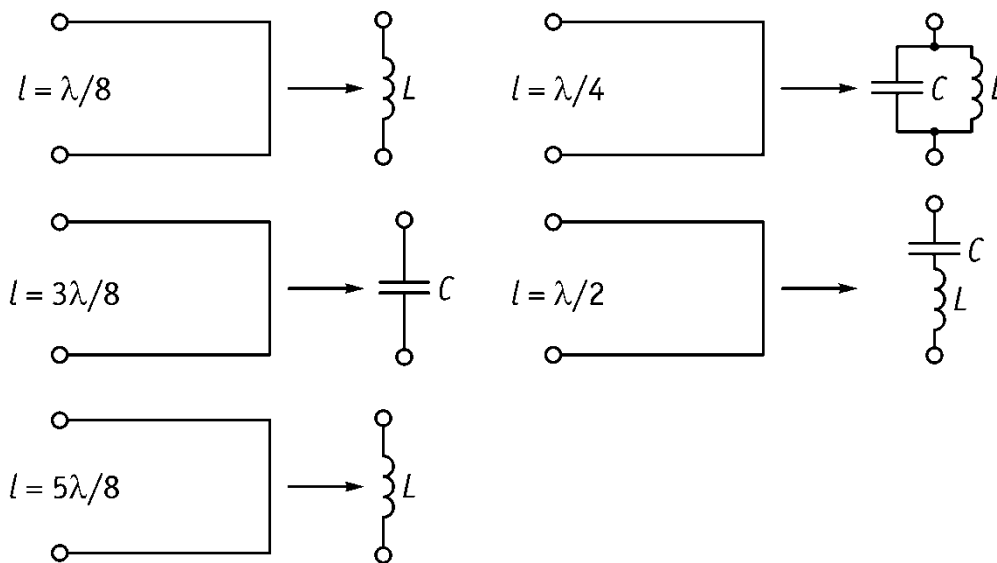


Рис. 19.7

Решение

1. Комплексное действующее значение напряжения в конце линии определяем, полагая $\gamma = j\beta$ и $\underline{I}_2 = 0$

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_1}{\cos \beta l} = \frac{10}{\cos \left(\frac{2\pi}{3} 5 \right)} = \frac{10}{-0,472} = -21,2 \text{ В}.$$

2. Комплексное действующее значение тока в начале и в конце линии определяем по формуле (19.18), полагая $\gamma = j\beta$ и $\underline{I}_2 = 0$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{\text{В}}} \sin \beta l = j \frac{-21,2}{470} \sin \frac{2\pi}{3} 5 = j \frac{-21,2}{470} (0,881) = j39,7 \text{ мА}.$$

3. Уравнения мгновенных значений напряжения и тока вдоль линии напишем, используя уравнения

$$u'_x(t) = |\underline{U}_2| \cos \beta x' \sin \omega t, \quad i'_x(t) = |\underline{U}_2| / |\underline{Z}_{\text{В}}| \sin \beta x' \sin (\omega t + \pi/2).$$

4. Определим коэффициенты отражения и бегущей волны, используя уравнения

$$\Gamma_{2u} = \frac{Z_H - Z_B}{Z_H + Z_B} = 1, \quad K_{\text{бв}} = \frac{1 - \Gamma_H}{1 + \Gamma_H} = \frac{1 - \Gamma_{2u}}{1 + \Gamma_{2u}} = 0, 0.$$

Задача 1. Вычислить при частоте $f = 1$ кГц волновое сопротивление однородной линии фазовую скорость, коэффициенты распространения, ослабления и фазы по заданным первичным параметрам: $R = 6,5$ Ом/км, $L = 2,29 \cdot 10^{-4}$ Гн/км, $C = 5,22 \cdot 10^{-9}$ Ф/км, $G = 50 \cdot 10^{-8}$ См/км.

Ответ: $V_{\text{ф}} = 28300$ км/с; $Z_B = 692e^{-j12^\circ}$ Ом; $\gamma = (49,2 + j 222)10^{-4}$ 1/км.

Задача 2. Входные сопротивления линии длиной 200 м на частоте 800 Гц в режимах холостого хода и короткого замыкания соответственно равны: $Z_{\text{в хх}} = 747e^{-j26,5^\circ}$ Ом, $Z_{\text{в кз}} = 516e^{j0,5^\circ}$ Ом. Определить вторичные и первичные параметры линии.

Ответ: $R = 540$ Ом/км; $L = 2,04 \cdot 10^{-3}$ Гн/км; $C = 6 \cdot 10^{-9}$ Ф/км; $G = 9,6 \cdot 10^{-8}$ См/км.

Задача 3. Напряжение на входе длинной линии $u(t) = 40 \sin(2\pi \cdot 50)$ В. Параметры линии: $R = 0,08$ Ом/км, $L = 1,336 \cdot 10^{-3}$ Гн/км, $C = 8,6 \cdot 10^{-9}$ Ф/км. Мощность потерь в изоляции равна 2 Вт/км. Определить: вторичные параметры, длину волны, фазовую скорость.

Список используемых источников

1. Бакалов В.П., Дмитриков В.Д. Крук Б.И. Основы теории цепей /Под редакцией проф. Бакалова В.П. – 3-е изд, перераб. и доп. – М.: Горячая линия – Телеком. 2009. – 596 с.
2. Бакалов В.П., Журавлева О.Б., Крук Б.И. Основы анализа цепей. – М.: Горячая линия – Телеком. 2007. – 592 с.
3. Белецкий А.Ф. Теория линейных электрических цепей. – М.: Радио и связь. 1986. – 528 с.
4. Лосев А.К. Теория линейных электрических цепей. М.: Высшая школа. 1987. – 511 с.
5. Матханов П.Н. Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи – М.: Высшая школа. 1990. – 400 с.
6. Матханов П.Н. Основы анализа электрических цепей. Нелинейные цепи – М.: Высшая школа. 1986. – 352 с.
7. Андреев Б.С. Теория нелинейных электрических цепей. – М.: Радио и связь 1982. – 280 с.
8. Лэм Г. Аналоговые и цифровые фильтры. Расчет и реализация. Пер. с англ. Левина В.Л., Микшиса М.Н., Теплюка К.Н. Под ред. к.т.н. Теплюка К.Н. – М.: Мир. – 1982. – 592 с.
9. Карни Ш. Теория цепей. Анализ и синтез / Перевод с англ. Горюнова Э.П., Петрова Е.А. под ред. Лондона С.Е. – М.: Связь. – 1971. – 368 с.
10. Гоноровский И.С., Демин М.П. Радиотехнические цепи и сигналы. Учеб. пособие для Вузов. – М.: Радио и связь. – 1994. – 480 с.
11. Хьюлсман Л.П., Аллен Ф.Е. Введение в теорию и расчет активных фильтров // Пер. с англ. Семенова Н.Н. Под ред. Знаменского А.Е. – М.: Радио и связь. – 1984. – 384 с.
12. Рясный Ю.В., Тихобаев В.Г., Панарин В.И. Математические основы цифровой обработки сигналов. Часть 1. Дискретные сигналы и дискретные цепи. Учебное пособие. – Новосибирск.: СибГУТИ. – 2007. – 176 с.
13. Рясный Ю.В. Линейные электрические цепи с распределенными параметрами. – Новосибирск: СибГУТИ. – 2002. – 37 с.
14. Бакалов В.П., Субботин Е.А. Синтез электрических цепей – ч. 1: Двухполюсники и четырехполюсники; учебное пособие. – Новосибирск: СибГУТИ. 2011. – 157 с.
15. Бакалов В.П., Субботин Е.А. Синтез электрических цепей – ч. 2: Аналоговые и цифровые фильтры, корректоры/учебное пособие. – Новосибирск: СибГУТИ. 2012. – 188 с.

**Валерий Пантелеевич Бакалов
Юрий Васильевич Рясный
Наталья Михайловна Гусельникова
Елена Викторовна Дежина**

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Курс лекций

Учебное пособие

Редактор: О.Б. Журавлева
Корректор: В.В. Сиделина

Подписано в печать 08.11.2013г.
Формат бумаги 60x84/16, отпечатано на ризографе, шрифт № 10,
изд. л. 17,4 заказ № 81, тираж – 200, СибГУТИ
630102, Новосибирск, ул. Кирова, 86