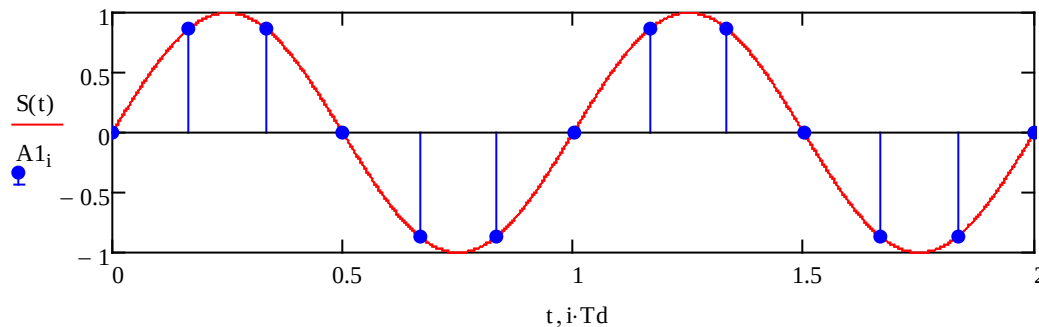


Дискретизация
непрерывных сигналов.

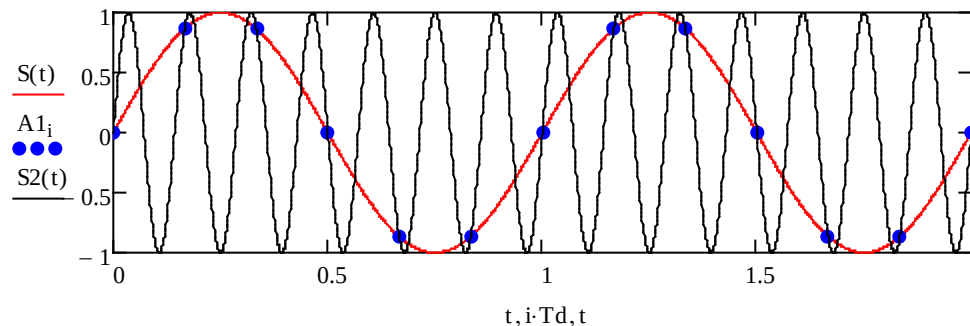
Дискретное
Преобразование Фурье

Периодическая дискретизация – процесс представления непрерывного сигнала последовательностью дискретных значений. (АЦП).

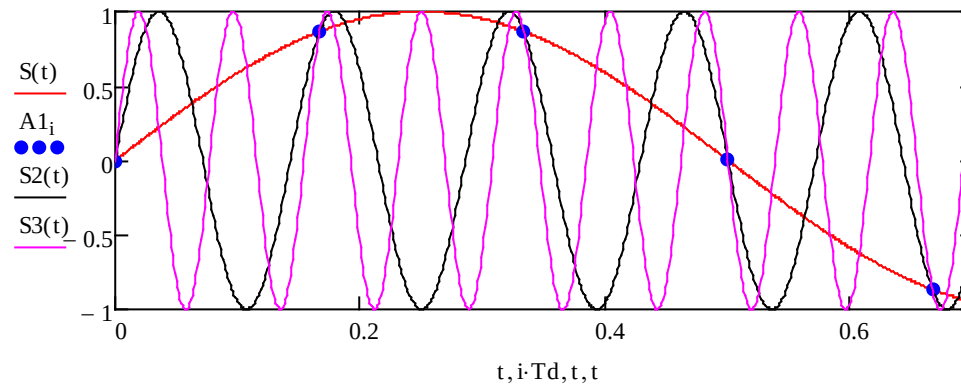
Для примера возьмем отсчеты синусоиды 1 Гц с частотой дискретизации 6 Гц.



Однако имея только отсчеты, нельзя однозначно восстановить синусоиду из которой они взяты. Для примера добавим синус с частотой 7 Гц.



Синусоида с частотой 13 Гц так же пройдет через эти точки

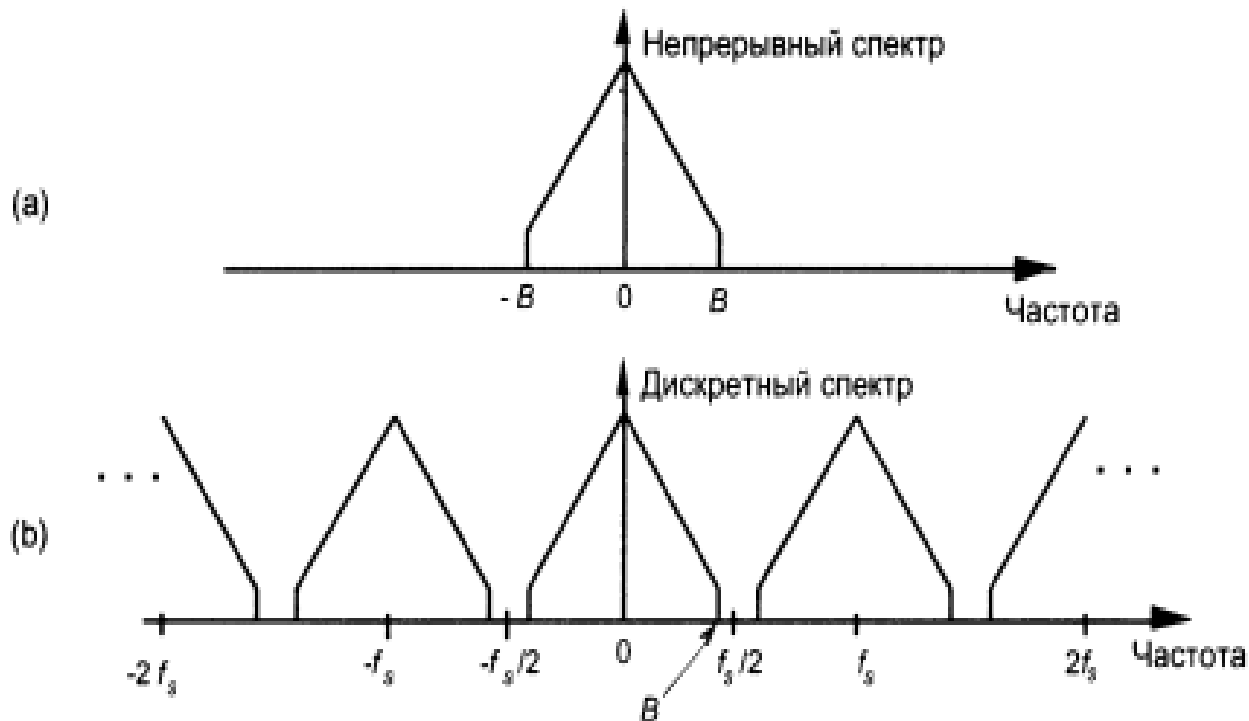


При дискретизации с частотой F_s мы не можем различить дискретизированные значения синусоиды с частотой f_0 и синусоиды с частотами $f_0 + kF_s$, где k любое целое число.

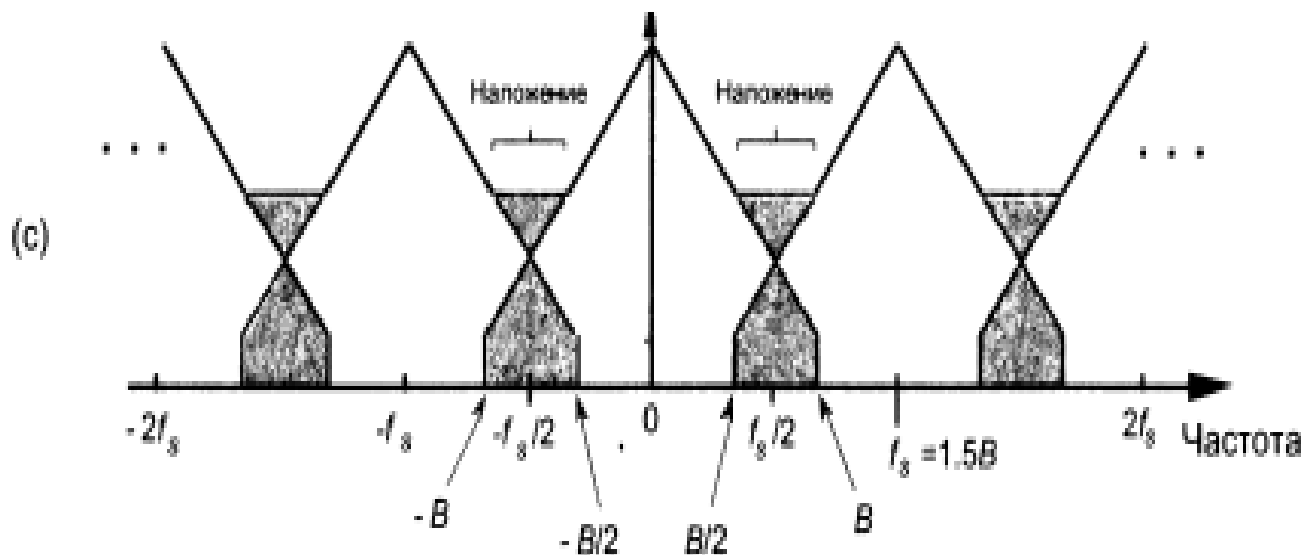
$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n t_s) = \sin(2\pi (f_0 + kF_s) n t_s)$$

Дискретная последовательность представляет бесконечное количество различных синусоид.

Спектр любой дискретной последовательности значений содержит периодически повторяющиеся копии исходного спектра непрерывного сигнала. Период повторения копий спектра в частотной области равен частоте дискретизации.



Если частота дискретизации будет меньше удвоенной верхней частоте в спектре исходного сигнала, то копии спектров будут перекрываться и восстановление сигнала станет невозможным



Дискретное преобразование Фурье

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt$$

– непрерывное преобразование

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp\left(\frac{-j2\pi mn}{N}\right)$$

– ДПФ в экспоненциальной форме.

Учитывая тождество Эйлера

$$e^{-j\phi} = \cos(\phi) - j \sin(\phi)$$

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left[\cos\left(\frac{2\pi nm}{N}\right) - j \sin\left(\frac{2\pi nm}{N}\right) \right]$$

– ДПФ в тригонометрической форме.

n – индекс временного отсчета

m – индекс ДПФ в частотной области.

При наличии N входных отсчетов ДПФ определяет спектральный состав в N равномерно распределенных точках частотной оси начиная с 0 Гц с шагом $\frac{F_s}{N}$

Отсчет ДПФ представляет собой сумму произведений входной последовательности отсчетов на последовательность соответствующих по времени отсчетов комплексной гармоники (т.е. корреляцию с синусом и косинусом соответствующей частоты).

Частоты гармоник определяются выражением $f(m) = \frac{mF_s}{N}$

Если отсчет представлен суммой действительной и мнимой частей

$$X(m) = X_{real}(m) + jX_{im}(m) = X_{mag}(m)e^{jX_{\phi}(m)}$$

Амплитуда и фаза

$$X_{mag}(m) = \sqrt{X_{real}(m)^2 + X_{im}(m)^2}$$

$$X_{\phi}(m) = a \tan\left(\frac{X_{im}(m)}{X_{mag}(m)}\right)$$

Рассмотрим пример из ЦОС Лайонса.

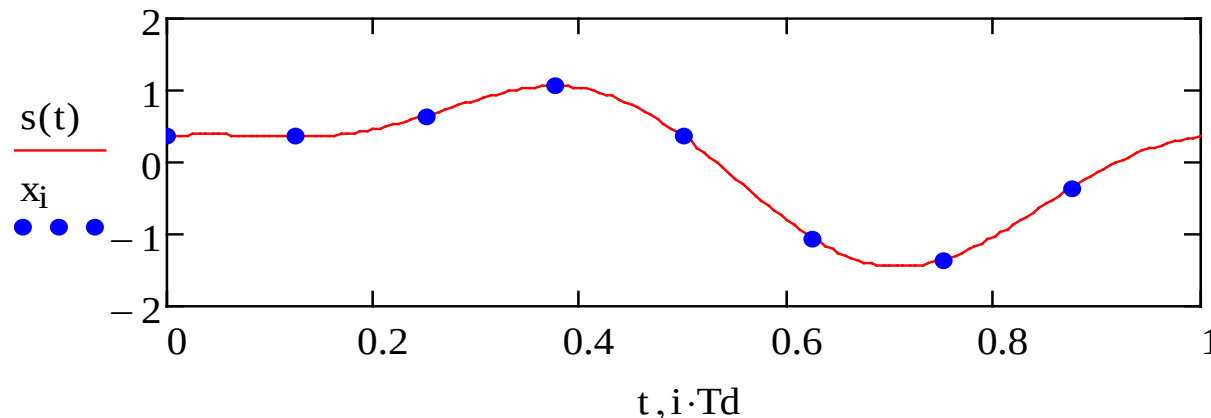
Зададим исходный непрерывный сигнал

$$x(t) = \sin(2\pi 1000t) + 0.5\sin(2\pi 2000t + 3\pi / 4)$$

Частота дискретизации 8кГц, период $t_s = \frac{1}{f_s} = 0.125 \text{ ms}$

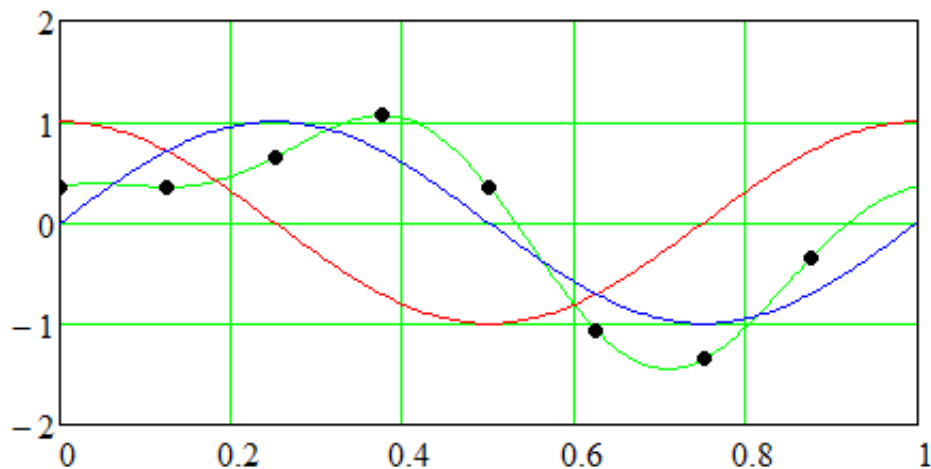
Число отсчетов N=8. Значения отсчетов

$$x^T = (0.3536 \quad 0.3536 \quad 0.6464 \quad 1.0607 \quad 0.3536 \quad -1.0607 \quad -1.3536 \quad -0.3536)$$



ДПФ будет определять амплитуды частотных составляющих с частотами

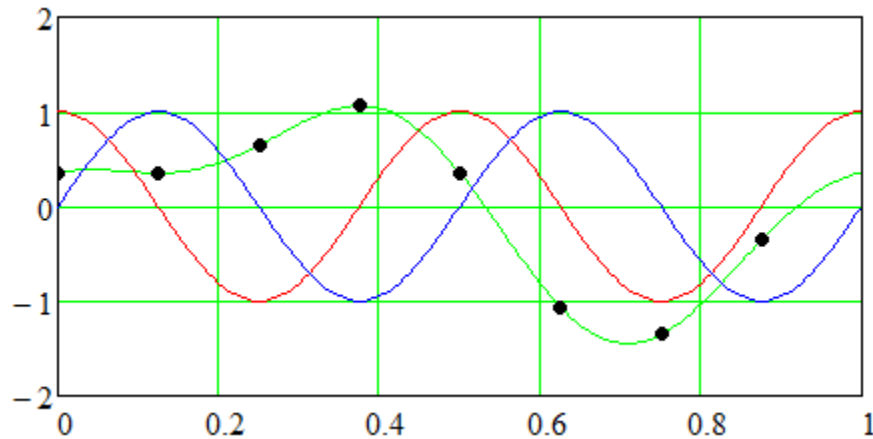
$$f(m) = \frac{mF_s}{N} = \frac{m8000}{8} = m1000 \quad \text{т.е. } 1, 2, 3, 4, 5, 6 \text{ и } 7 \text{ кГц.}$$



$$X(1) = \sum_{n=0}^7 x(n) \left[\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) - j \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 X(1) = & \begin{array}{lll}
 0.3535 \cdot 1.0 & -j(0.3535 \cdot 0.0) & \leftarrow \text{это слагаемое с } n=0 \\
 + 0.3535 \cdot 0.707 & -j(0.3535 \cdot 0.707) & \leftarrow \text{это слагаемое с } n=1 \\
 + 0.6464 \cdot 0.0 & -j(0.6464 \cdot 1.0) & \leftarrow \text{это слагаемое с } n=2 \\
 + 1.0607 \cdot -0.707 & -j(1.0607 \cdot 0.707) & \dots \\
 + 0.3535 \cdot -1.0 & -j(0.3535 \cdot 0.0) & \dots \\
 - 1.0607 \cdot -0.707 & -j(-1.0607 \cdot -0.707) & \dots \\
 - 1.3535 \cdot 0.0 & -j(-1.3535 \cdot -1.0) & \dots \\
 - 0.3535 \cdot 0.707 & -j(-0.3535 \cdot -0.707) & \leftarrow \text{это слагаемое с } n=7
 \end{array} \\
 = & \begin{array}{ll}
 0.3535 & +j0.0 \\
 + 0.250 & -j0.250 \\
 + 0.0 & -j0.6464 \\
 - 0.750 & -j0.750 \\
 - 0.3535 & -j0.0 \\
 + 0.750 & -j0.750 \\
 + 0.0 & -j1.3535 \\
 - 0.250 & -j0.250 \\
 = 0.0 - j4.0 & = 4 \angle -90^\circ.
 \end{array}
 \end{aligned}$$

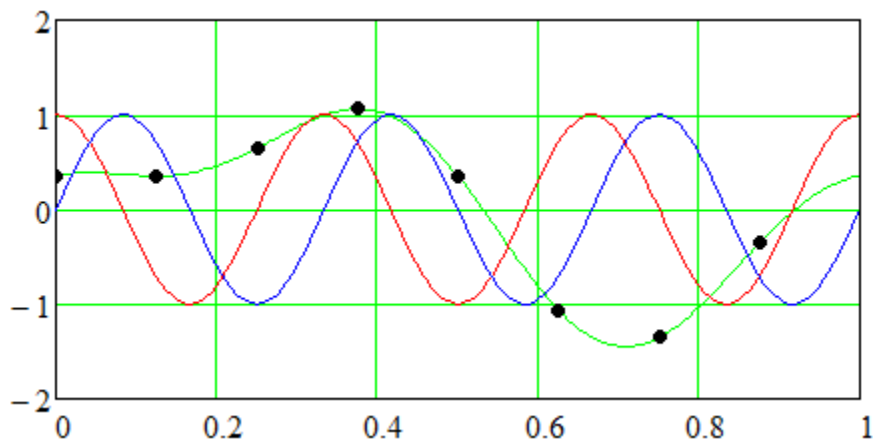
ДПФ показало наличие гармоник частотой 1 кГц с амплитудой 4 и углом относительно косинусоиды 90 градусов.



Анализ показал наличие частотной составляющей 2 кГц с относительной амплитудой 2 и фазой 45 градусов.

$$X(2) = \sum_{n=0}^7 x(n) \left[\cos\left(\frac{2\pi 2n}{N}\right) - j \sin\left(\frac{2\pi 2n}{N}\right) \right]$$

$$\begin{aligned} X(2) &= \begin{array}{ll} 0.3535 \cdot 1.0 & -j(0.3535 \cdot 0.0) \\ + 0.3535 \cdot 0.0 & -j(0.3535 \cdot 1.0) \\ + 0.6464 \cdot -1.0 & -j(0.6464 \cdot 0.0) \\ + 1.0607 \cdot 0.0 & -j(1.0607 \cdot -1.0) \\ + 0.3535 \cdot 1.0 & -j(0.3535 \cdot 0.0) \\ - 1.0607 \cdot 0.0 & -j(-1.0607 \cdot 1.0) \\ - 1.3535 \cdot -1.0 & -j(-1.3535 \cdot 0.0) \\ - 0.3535 \cdot 0.0 & -j(-0.3535 \cdot -1.0) \end{array} \\ &= \begin{array}{ll} 0.3535 & +j0.0 \\ + 0.0 & -j0.3535 \\ - 0.6464 & -j0.0 \\ - 0.0 & +j1.0607 \\ + 0.3535 & -j0.0 \\ + 0.0 & +j1.0607 \\ + 1.3535 & -j0.0 \\ - 0.0 & -j0.3535 \end{array} \\ &= 1.414 + j1.414 = 2 \angle 45^\circ. \end{aligned}$$

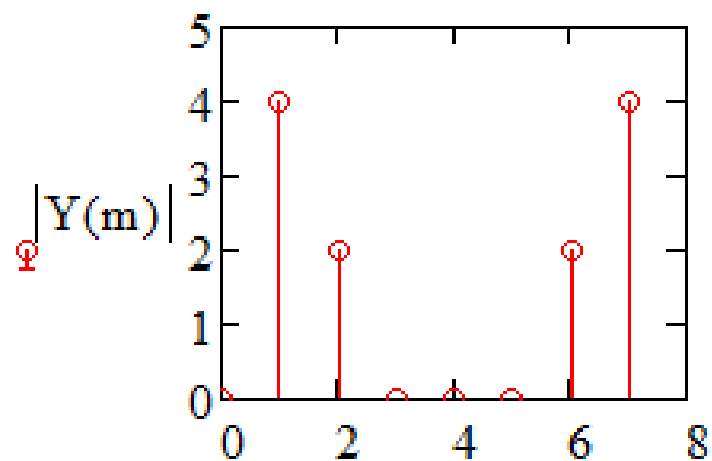


$$X(3) = \sum_{n=0}^7 x(n) \left[\cos\left(\frac{2\pi 3n}{N}\right) - j \sin\left(\frac{2\pi 3n}{N}\right) \right]$$

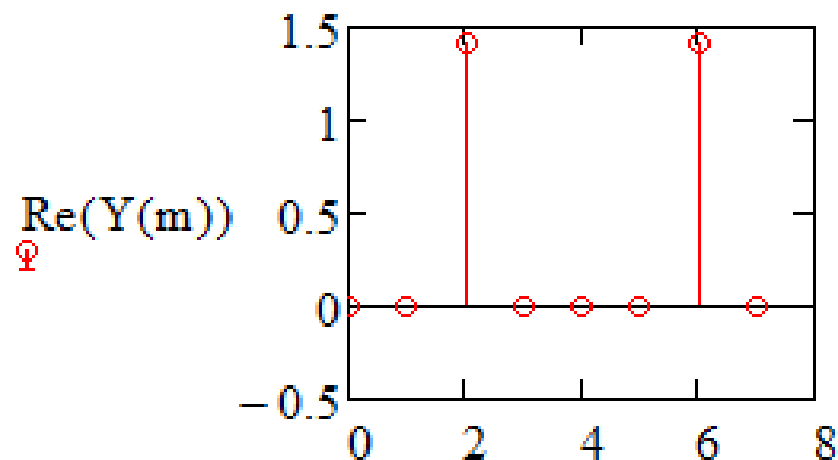
$$\begin{aligned}
 X(3) &= 0.3535 \cdot 1.0 & -j(0.3535 \cdot 0.0) \\
 &+ 0.3535 \cdot -0.707 & -j(0.3535 \cdot 0.707) \\
 &+ 0.6464 \cdot 0.0 & -j(0.6464 \cdot -1.0) \\
 &+ 1.0607 \cdot 0.707 & -j(1.0607 \cdot 0.707) \\
 &+ 0.3535 \cdot -1.0 & -j(0.3535 \cdot 0.0) \\
 &- 1.0607 \cdot 0.707 & -j(-1.0607 \cdot -0.707) \\
 &- 1.3535 \cdot 0.0 & -j(-1.3535 \cdot 1.0) \\
 &- 0.3535 \cdot -0.707 & -j(-0.3535 \cdot -0.707) \\
 &= 0.3535 & +j0.0 \\
 &- 0.250 & -j0.250 \\
 &+ 0.0 & +j0.6464 \\
 &+ 0.750 & -j0.750 \\
 &- 0.3535 & -j0.0 \\
 &- 0.750 & -j0.750 \\
 &+ 0.0 & +j1.3535 \\
 &+ 0.250 & -j0.250 \\
 &= 0.0 - j0.0 & = 0 \angle 0^\circ.
 \end{aligned}$$

Составляющая с частотой 3 кГц
не обнаружена.

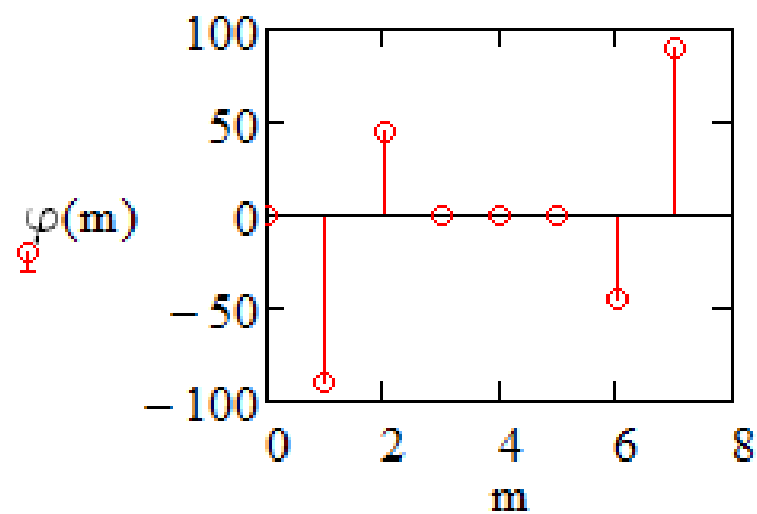
Модуль



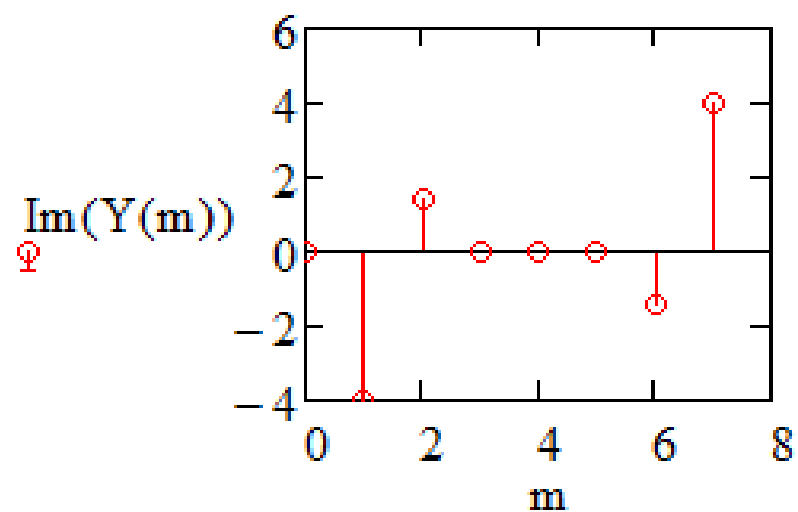
Действительная



Фаза



Мнимая часть



Симметрия ДПФ

$N - m$ – отсчет имеет такой же модуль как m -тый и противоположный знак фазового угла. Т.о. отсчеты являются комплексно-сопряженными.

Аналогично действительная часть имеет четную симметрию, а мнимая - нечетную.

Значит можно вычислить только половину отсчетов и другую получать с учетом симметрии (БПФ).

Когда входной сигнал содержит синусоидальный компонент с амплитудой A и целым числом периодов на интервале N отсчетов, амплитуда выходного отсчета ДПФ равна $\frac{A_0 N}{2}$

При аппаратной реализации важно учитывать, что числа на выходе ДПФ могут превышать пиковые значения входного сигнала в $N/2$ раз.

При $m=0$ получаем постоянную составляющую

$$X(0) = \sum_{n=0}^7 x(n) [\cos(0) - j \sin(0)] = \sum_{n=0}^7 x(n) = 0$$

Если входной сигнал имеет постоянную составляющую, то модуль отсчета ДПФ на нулевой частоте в N раз больше.

В разных пакетах моделирования ДПФ может реализовываться с разными коэффициентами

$$X(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp\left(\frac{-j2\pi mn}{N}\right)$$

$$X(m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp\left(\frac{-j2\pi mn}{N}\right)$$

Обратное дискретное преобразование Фурье ОДПФ

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) \exp\left(\frac{j2\pi mn}{N}\right)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) \left[\cos\left(\frac{2\pi nm}{N}\right) + j \sin\left(\frac{2\pi nm}{N}\right) \right]$$

В Mathcad реализованы четыре пары преобразования Фурье. Они отличаются учетом симметрий, нормировочным коэффициентом и соглашением о знаке перед мнимой единицей в показателе экспоненты.

fft – использует при вычислении симметрии (алгоритм БПФ), поэтому требует только вещественные вектора размером $N = 2^q$ где q -целое и возвращает комплексный вектор размером

$1 + 2^{q-1}$
элементы которого вычисляются выражением

$$X_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(\frac{j2\pi mn}{N}\right)$$

ifft – ОБПФ. Входной вектор длиной $1 + 2^q$
Возвращает вещественный вектор.

$$d_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} x_n \exp\left(\frac{j2\pi mn}{N}\right)$$

Функции `cfft` `icfft` не используют симметрии и могут работать с векторами любой длины и так же с комплексными входными отсчетами. Входные и выходные массивы имеют одинаковые размеры.

FFT и IFFT имеют другой коэффициент и знаки в экспоненте:

$$X_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(\frac{-j2\pi mn}{N}\right) \quad d_m = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_n \exp\left(\frac{j2\pi mn}{N}\right)$$

Все пары функций взаимно обратные $cfft(fft(y)) = y$

Утечка ДПФ

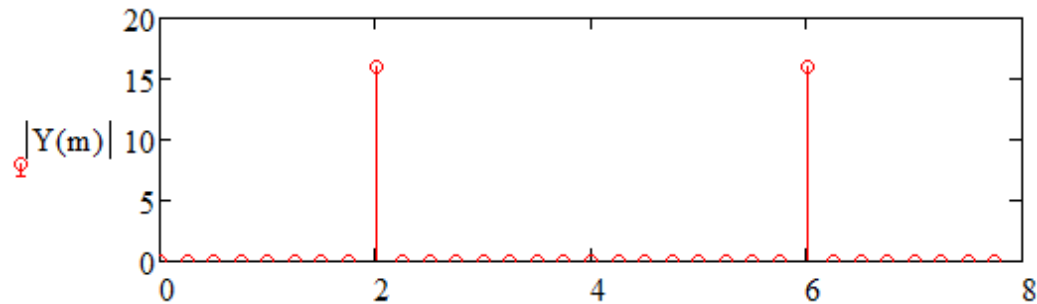
ДПФ дает правильный результат только когда гармоники сигнала точно совпадают с какими-либо аналитическими частотами (бинами)

$$f_a(m) = \frac{mF_s}{N}$$

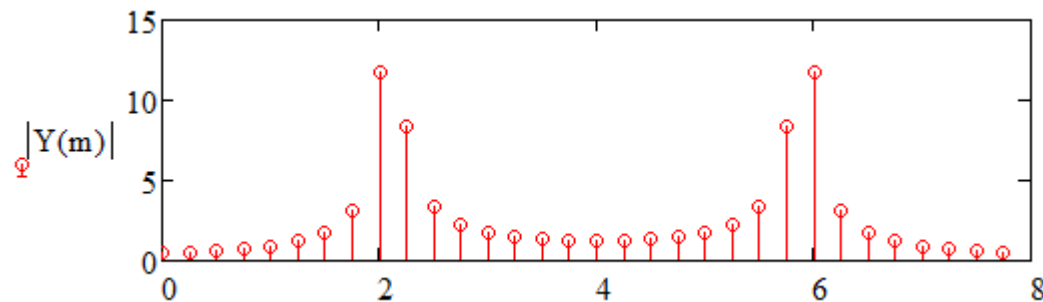
Аналитические частоты имеют целое число периодов на интервале анализа.

Если сигнал содержит гармонику, лежащую между аналитическими частотами, она проявится на всех выходных бинах ДПФ.

Рассмотрим сигнал частотой 2 кГц дискретизированный с частотой 8 кГц по 32 отсчета. Его частота совпадает с восьмым бином и спектр корректен.



При ДПФ сигнала с частотой 2.1 кГц



Как видим энергия входного сигнала распределилась по всем бином.