

Моделирование фильтров

Фильтрация представляет собой обработку сигнала в результате которой изменяется спектральный состав.

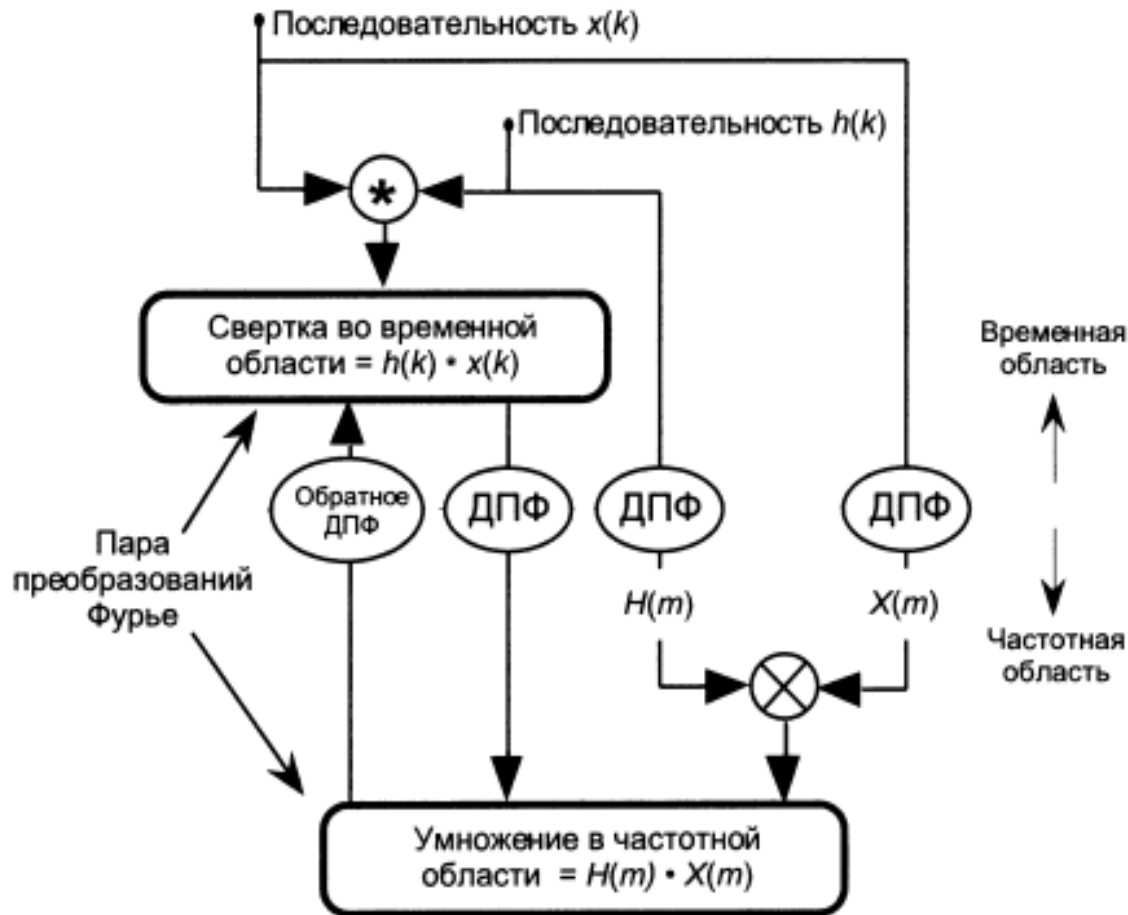
Частотные составляющие спектра сигнала перемножаются с соответствующими составляющими частотной характеристики четырехполюсника.

Аналоговые фильтры обрабатывают непрерывные сигналы.

Цифровые фильтры обрабатывают последовательности отсчетов сигнала.

Теорема о свертке

Если две последовательности во временной области $h(k)$, $x(k)$ имеют ДПФ $H(m)$, $X(m)$, то ДПФ свертки во времени $h(k) * x(k)$ есть произведение спектров $H(m) \cdot X(m)$



Можно поменять местами временную и частотные области.

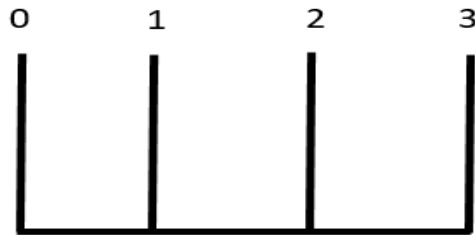
Свертка в одной области равна произведению в другой.

Т.е. взвешивание импульсной характеристики окном во времени равно свертке частотной характеристики фильтра и частотной характеристики окна.

Реализация свертки во времени

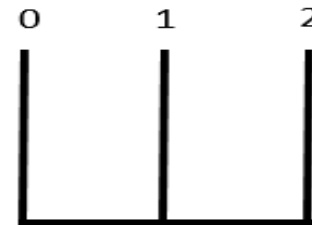
- N – количество отсчетов импульсной характеристики;
- n – количество отсчетов входной последовательности;
- $n1=0..N+n-2$ индекс текущего выходного.

x



Исходный сигнал

h



Импульсная характеристика

x

3

2

1

0

Окно движается влево
по отсчетам сигнала

 h

0

1

2

0

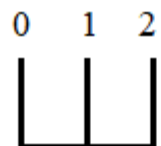
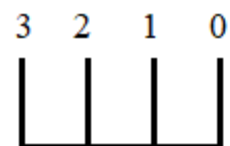
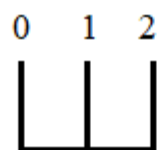
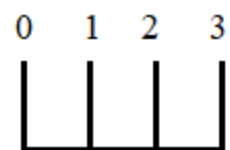
1

2

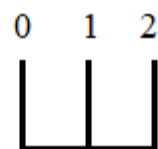
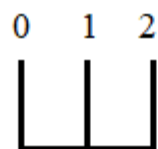
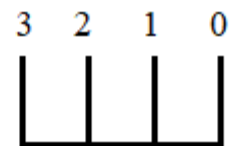
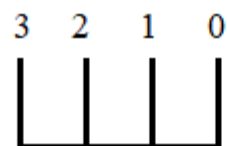
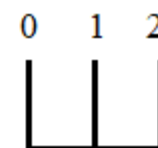
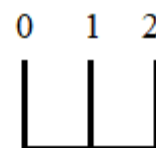
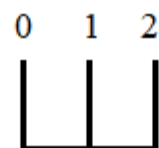
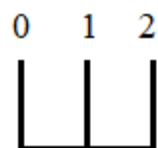
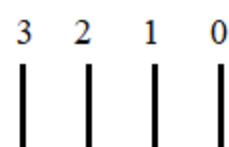
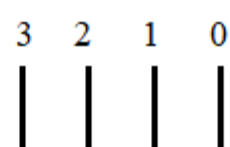
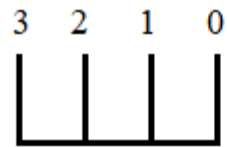
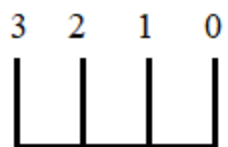
0

1

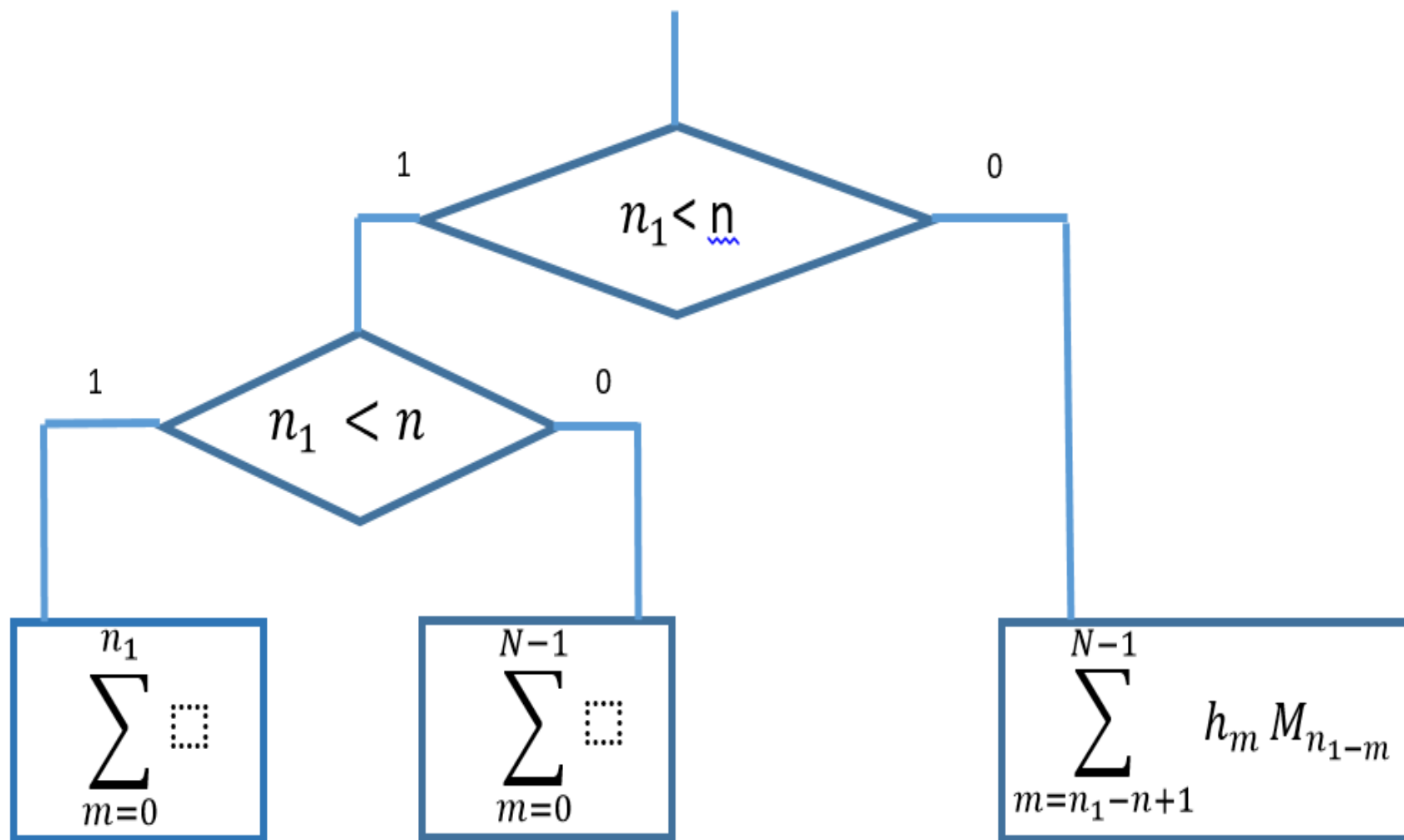
2



Окно движется влево по отсчетам сигнала



N1		
0	$h_0 x_0$	
1	$h_0 x_1 + h_1 x_0$	
2	$h_0 x_2 + h_1 x_1 + h_2 x_0$	$\sum_{m=0}^{N-1} n_m M_{n1-m}$
3	$h_0 x_3 + h_1 x_2 + h_2 x_1$	
4	$h_1 x_3 + h_2 x_2$	
5	$h_2 x_3$	



Пределы суммирования

Если в обработке отсчетов $n_1 < N$, то суммируем до $m = n_1$.

Если входной отсчет есть, то он всегда умножается на h_0 . Суммируем от $m = 0$.

Если входные отсчеты кончились, суммируем от $m = n_1 - (n - 1) = n_1 - n + 1$ до $N - 1$.

Импульсные характеристики идеальных КИХ фильтров

Тип фильтра	$n = 0$	$n \neq 0$
ФНЧ	$2f_{cp}$	$\frac{\sin(2\pi f_{cp} n)}{n\pi}$
ПФ	$2(f_{\epsilon} - f_{\kappa})$	$\frac{\sin(2\pi f_{\epsilon} n)}{n\pi} - \frac{\sin(2\pi f_{\kappa} n)}{n\pi}$
ФВЧ	$1 - 2f_{cp}$	$\frac{-\sin(2\pi f_{cp} n)}{n\pi}$

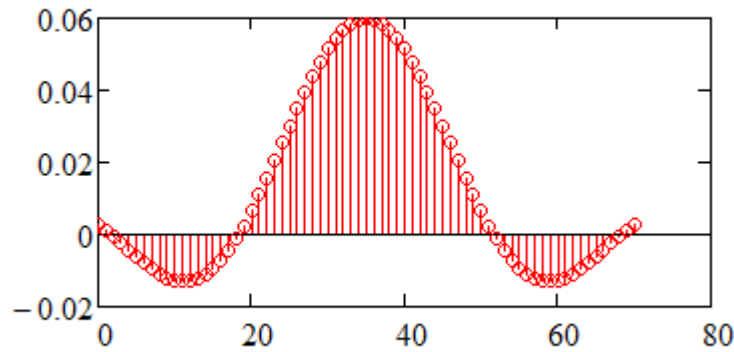
f_{cp} - частота относительно частоты дискретизации (до половины)

- Идеальные импульсные характеристики бесконечны и поэтому физически нереализуемы.
- Для реализации фильтров идеальные ИХ усекают до N отсчетов и сдвигают вправо, так, чтобы отрицательный отсчет с максимальным номером стал нулевым.
- Количество отсчетов ИХ определяет степень приближения к идеальной АЧХ.
- Нормированная АЧХ фильтра может быть вычислена по его ИХ.

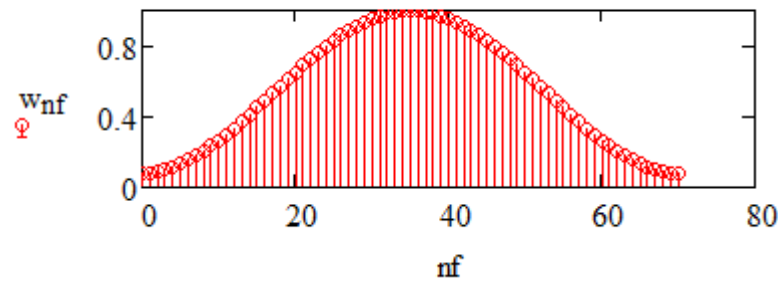
$$H(f) = h_{\frac{N-1}{2}} + 2 \cdot \sum_{a=1}^{\frac{N-1}{2}} \left[h_{\frac{N-1}{2}-a} \cos(2\pi f_s a) \right]$$

ФНЧ

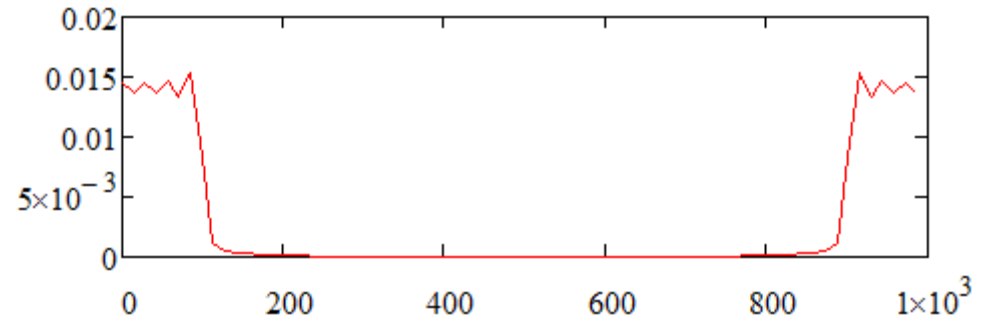
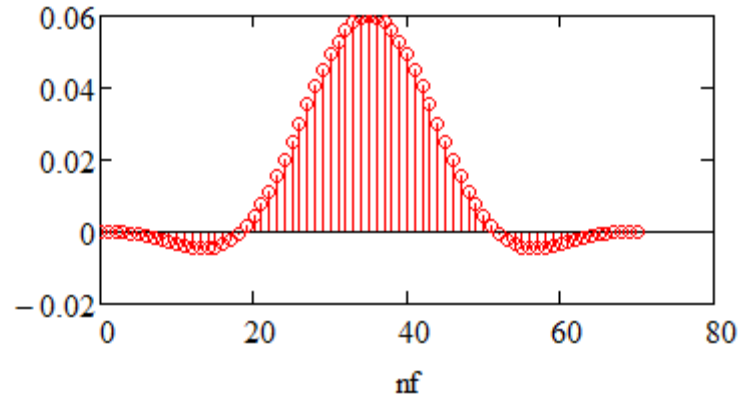
Импульсная характеристика фильтра



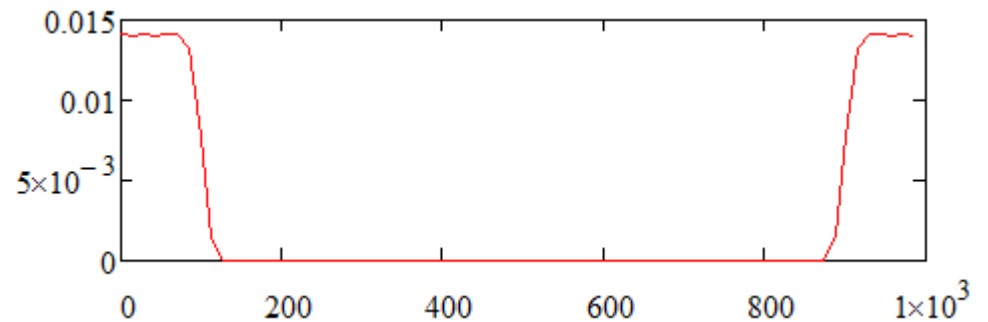
Окно Хемминга



Импульсная характеристика фильтра



$$w(n) := 0.54 + 0.46 \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot n}{N}\right)$$



$$Fd := 1 \cdot 10^3$$

$$n := 10T \cdot Fd = 1 \times 10^3$$

$$M(Fd, n) := \left| \begin{array}{l} Td \leftarrow \frac{1}{Fd} \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad M_i \leftarrow S(i \cdot Td) \\ M \end{array} \right.$$

$$\underline{M} := M(Fd, n)$$

$$nf := 0..N-1 \quad \underline{h}_{nf} := h\left(nf - \frac{N-1}{2}\right)$$

$$Y_{n1} := \left[\begin{array}{c} \text{if}(n1 < N, n1, N-1) \\ \sum \\ m = \text{if}(n1 < n-1, 0, n1-n+1) \end{array} (h_m \cdot M_{n1-m}) \right]^{\blacksquare}$$

Длина равна сумме отсчетов ИХ фильтра и сигнала

$$\underline{F} := \text{CFFT}(h)$$

$$Z := \text{CFFT}(M) \quad j := 0.. \text{last}(Z) \quad \text{SpPMS}_j := |Z_j|$$

КИХ ФНЧ фильтр в Mathcad представлен функцией $lowpass(f_s, N, w)$

f_s – частота среза относительно частоты дискретизации;

N – количество отсчетов импульсной характеристики;

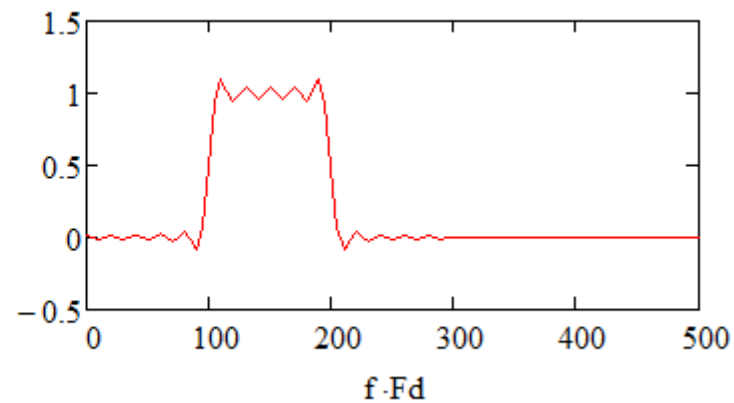
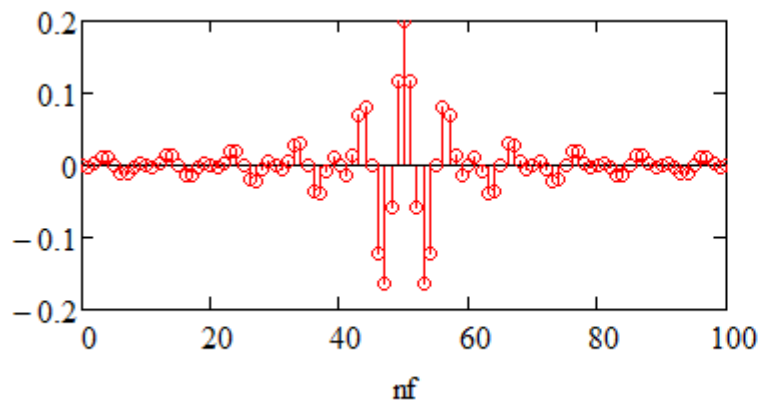
W – тип взвешивающего окна

Значение w	Окно
0	текущее окно по умолчанию
1	прямоугольное (по умолчанию)
2	трапецевидное
3	triangular
4	окно Хеннинга
5	окно Хэмминга
6	окно Блэкмена
7	Окно Нуттела

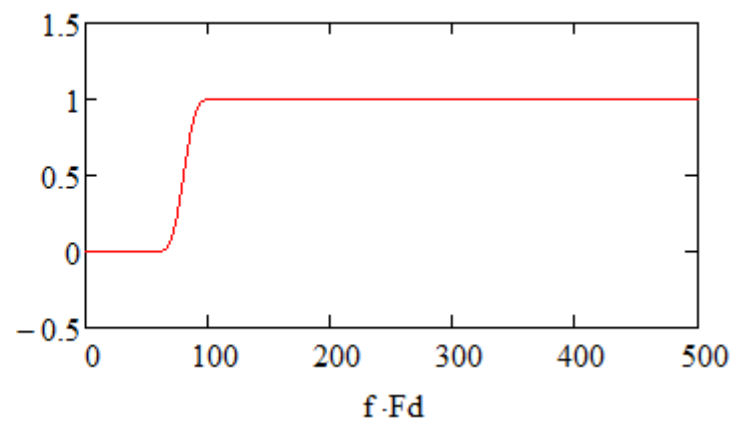
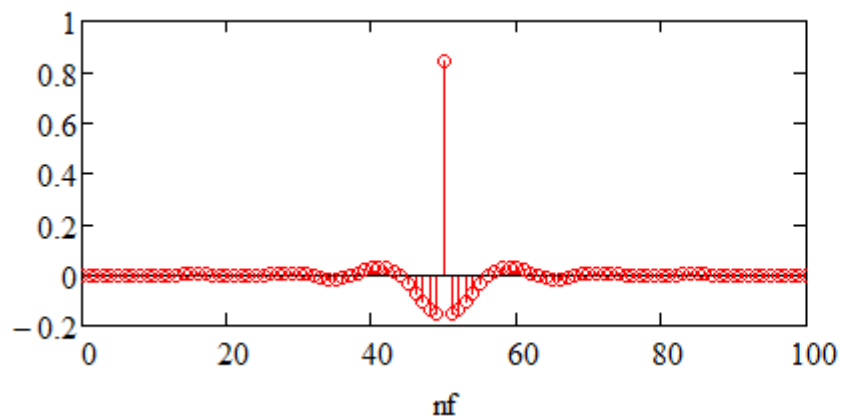
ИХ

АЧХ

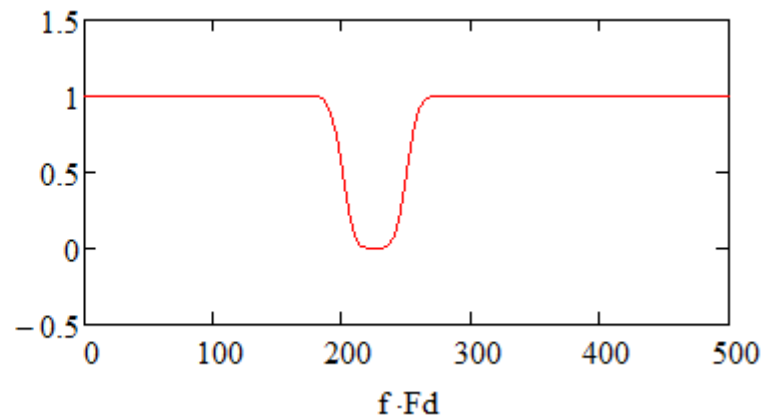
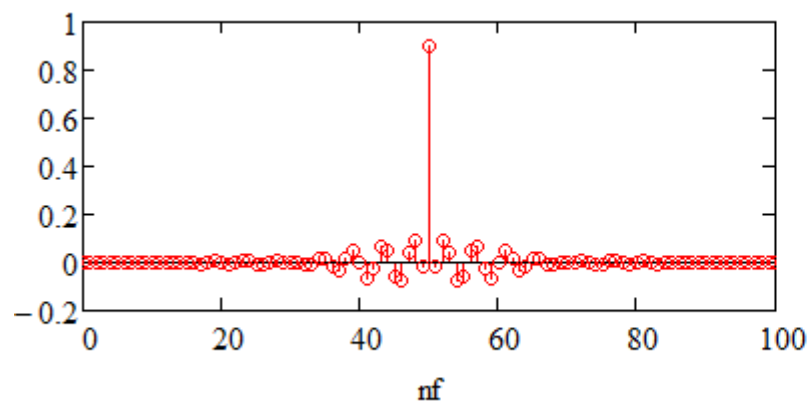
ПФ



ФВЧ



ПРФ



КИХ ПФ фильтр в Mathcad

$bandpass(f_1, f_2, N, w)$

КИХ ФВЧ фильтр в Mathcad

$highpass(f_s, N, w)$

Полосовой
режекторный фильтр

$bandstop(f_1, f_2, N, w)$

Функция свертки в Mathcad

$Y := \text{convol}(h, M)$