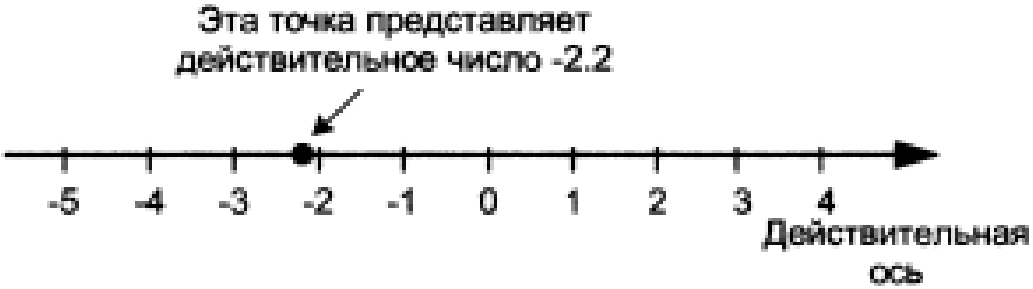
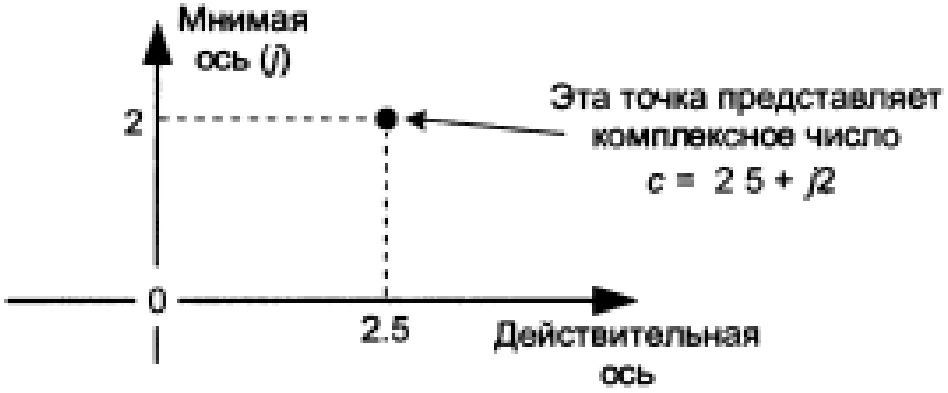
Квадратурные сигналы

Комплексные числа

Действительные числа – это одномерные числа положительные и отрицательные. Можно представить как точка на прямой.

Комплексные числа – представляют собой точку на двумерной комплексной плоскости.



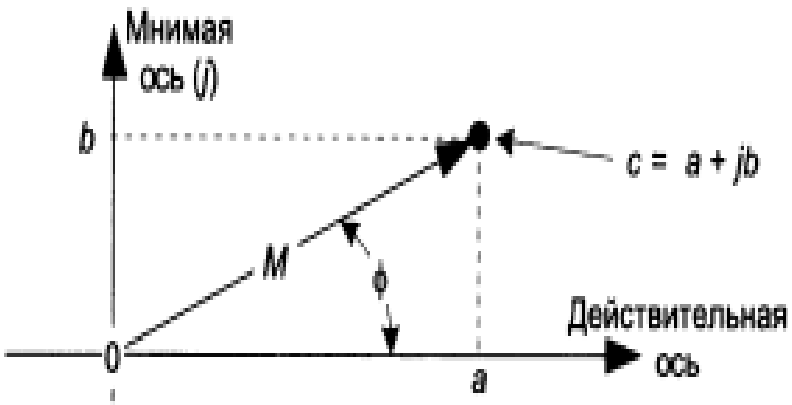


Комплексная плоскость проходит через систему координат включающую действительную и мнимую оси.

В прямоугольной системе координат комплексное число записывается следующим образом $c = a + jb$

$j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

В полярной системе координат любую точку можно представить вектором, соединяющим начало координат с точкой.

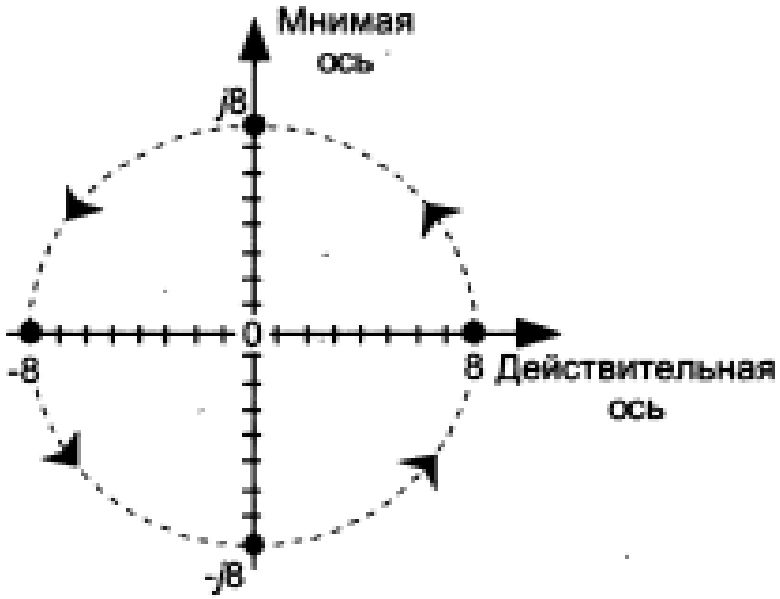


$$M = \sqrt{a^2 + b^2}$$

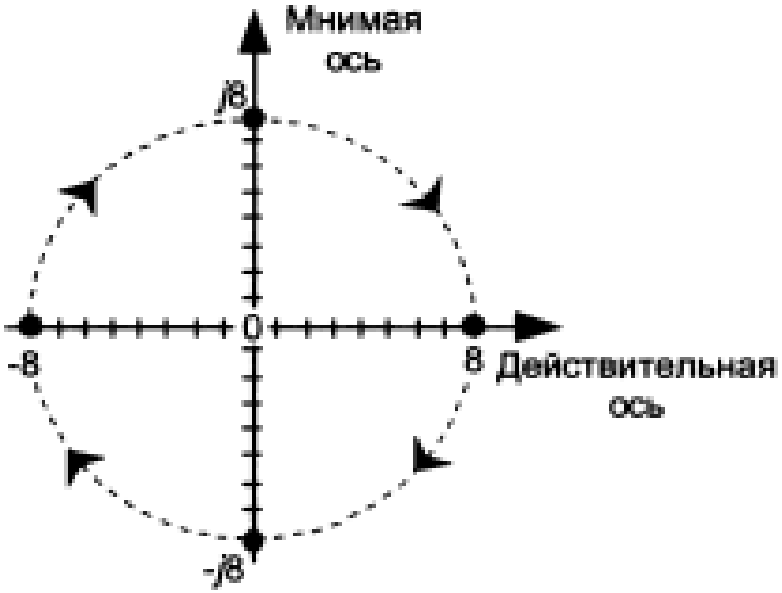
$$\phi = a\tan\left(\frac{b}{a}\right)$$

В показательной (полярной) форме $c = Me^{j\phi}$

Оператор $j = \sqrt{-1}$ обозначает поворот комплексного числа на 90 градусов против часовой стрелки.



= умножение на j



= умножение на $-j$

Рассмотрим комплексное число, модуль которого равен 1, а угол меняется во времени $e^{j2\pi f t} = e^{j\omega t}$

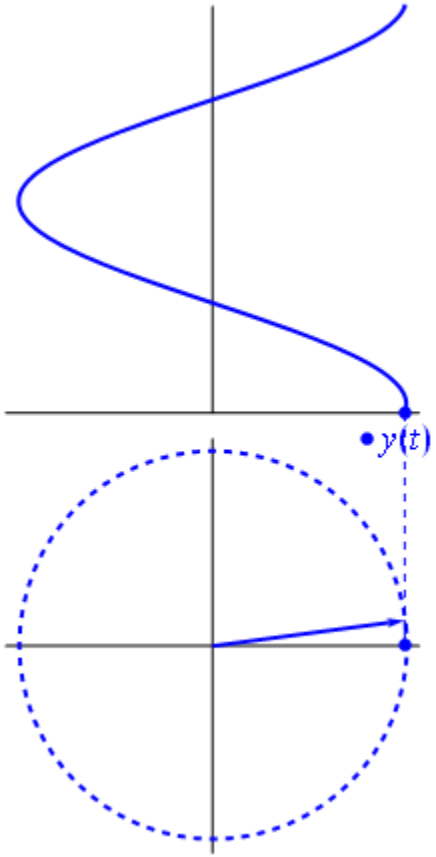
С течением времени это число будет описывать окружность с центром в начале координат против часовой стрелки с частотой f.

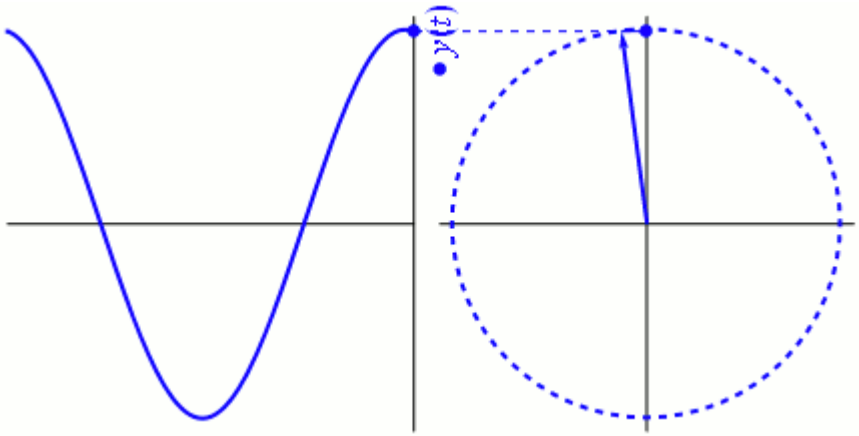
$e^{-j2\pi f t}$ – единичный вектор, вращающийся по часовой стрелке

Эти вектора называются квадратурными сигналами, комплексными экспонентами или фазорами.

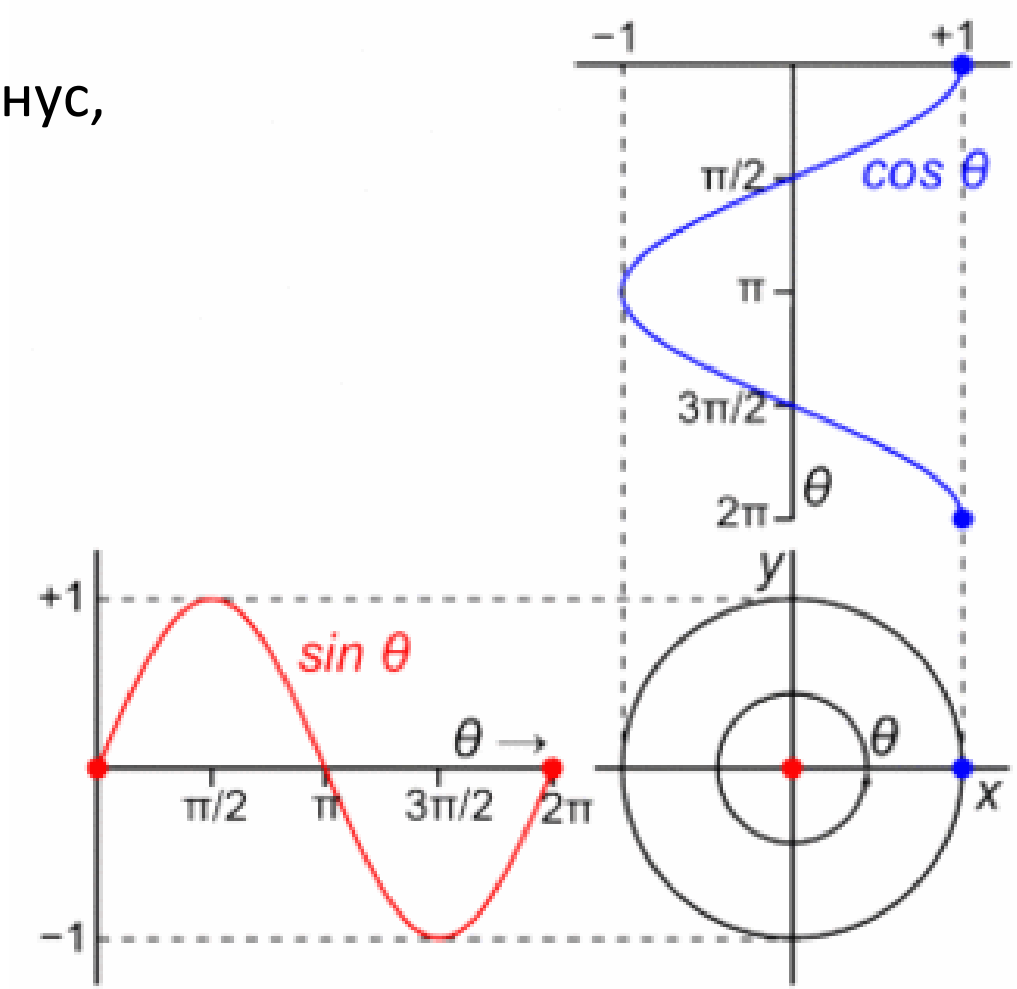
Понятие положительных и отрицательных частот отражает направление вращения фазоров. Положительные частоты вращаются против часовой стрелки, отрицательные – по ЧС.

Проекции фазора на действительную ось представляет собой косинус, на мнимую – синус.

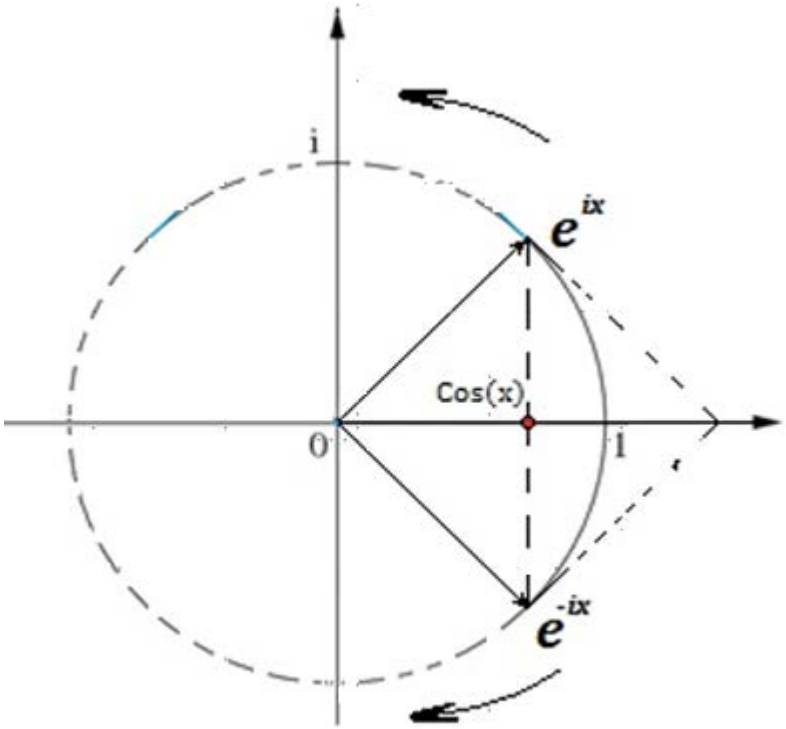




Проекции фазора на действительную ось представляет собой косинус, на мнимую – синус.



Рассмотрим два фазора с одинаковыми по модулю, но разными по знаку углами. Они будут синхронно вращаться в противоположных направлениях, при этом действительные части фазоров всегда суммируются с одинаковыми знаками, а мнимые всегда взаимно уничтожаются. Результат их сложения будет всегда лежать на действительной оси.

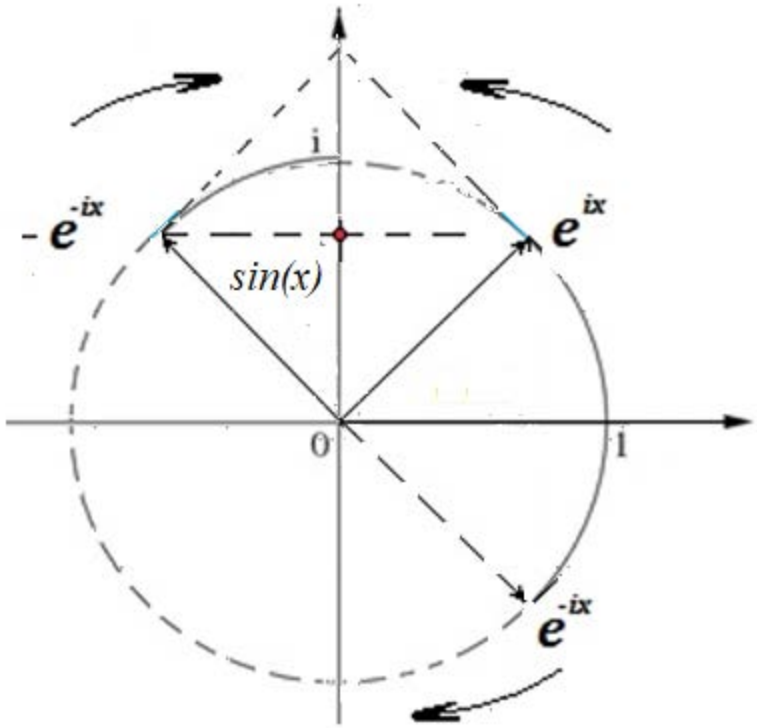


При этом половина векторной суммы фазоров, будет равна проекции фазоров на действительную ось – это косинус.

$$\cos(2\pi f t) = \frac{e^{j2\pi f t} + e^{-j2\pi f t}}{2}$$

Для получения проекции на мнимую ось фазор с положительным углом, нужно складывать с отрицательным фазором умноженным на -1.
Для получения действительного синуса нужно разделить на мнимую единицу.

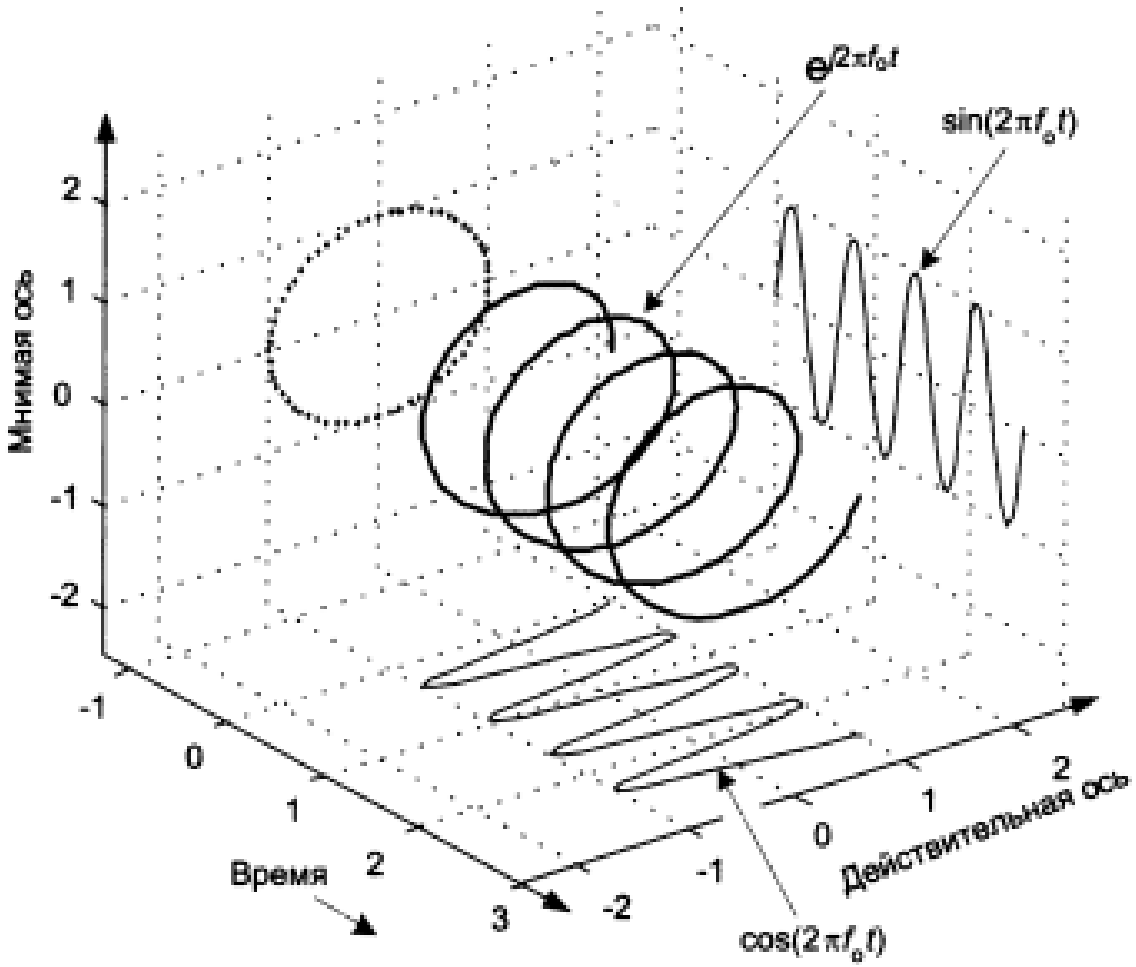
$$\sin(2\pi f t) = \frac{e^{j2\pi f t} - e^{-j2\pi f t}}{2j} = j\frac{e^{-j2\pi f t}}{2} - j\frac{-e^{j2\pi f t}}{2}$$



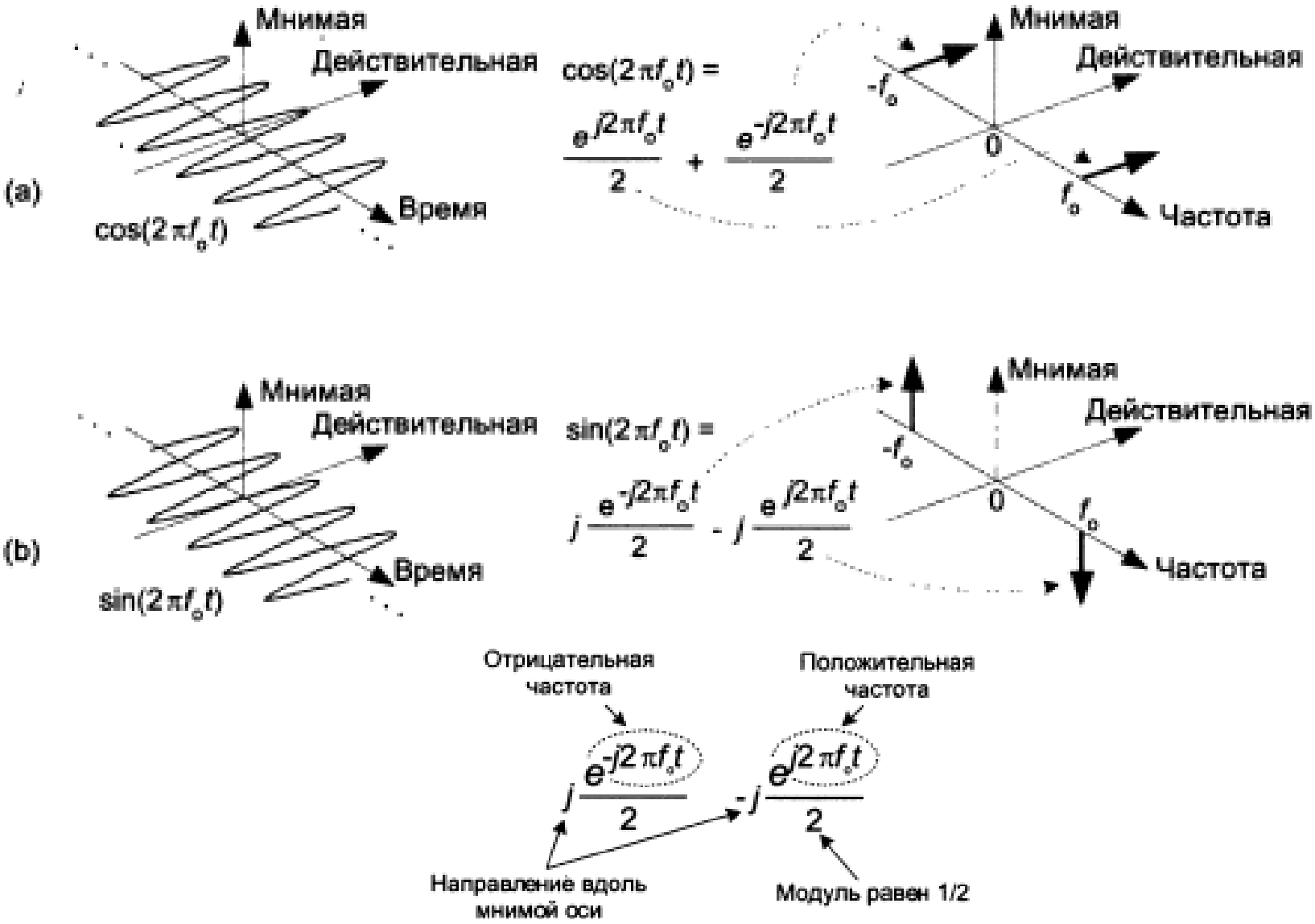
$$e^{j2\pi f t} = \cos(2\pi f t) + j\sin(2\pi f t)$$

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos(\pi/2) + j\sin(\pi/2) = j$$

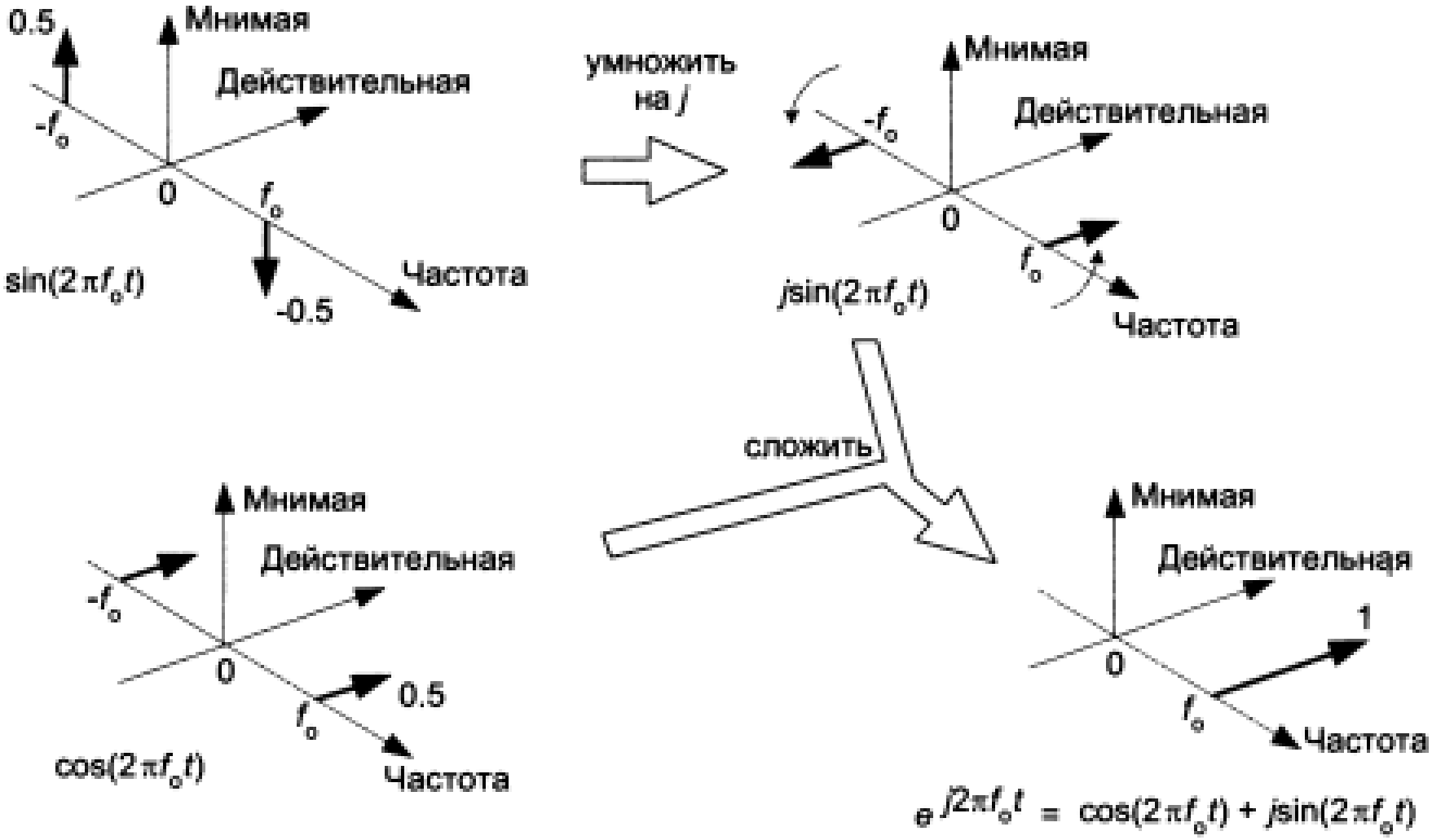
Движение фазора во времени



Квадратурные сигналы в частотной области



Тождество Эйлера в комплексной частотной области



Сопряженная симметрия

В квадратурной обработке принято
Действительную часть спектра называть синфазной составляющей,
Мнимую часть спектра – квадратурной составляющей.

Действительные сигналы всегда содержат спектральные компоненты с положительными и отрицательными частотами.

Положительные и отрицательные компоненты синфазной (действительной) составляющей всегда имеют четную симметрию относительно нулевой частоты.

Соответствующие компоненты квадратурной составляющей всегда имеют одинаковые углы, но противоположные знаки.

Квадратурное смешивание

Умножение сигнала на комплексную экспоненту $e^{j2\pi f t}$ сдвигает спектр сигнала вверх на f Гц.

Умножение сигнала на комплексную экспоненту $e^{-j2\pi f t}$ сдвигает спектр сигнала вниз на f Гц.

Если центральная частота полосового сигнала равна частоте комплексной экспоненты со знаком минус, то после перемножения центральная частота становится равной нулю – перенос в основную полосу.

Комплексная огибающая

$$s_{нес}(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi)$$ – несущая.

При модуляции мы изменяем параметры несущего колебания

$$s(t) = a(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$$

$$\Phi(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$$ – полная фаза

Рассмотрим комплексный сигнал

$$s\ (t) = a(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t)) + ja(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t)) =$$

$$= a(t)e^{j(\omega_0 t + \varphi(t))} = a(t)e^{j\varphi(t)}e^{j\omega_0 t}$$

$$g(t) = a(t)e^{j\varphi(t)}$$ – комплексная огибающая

Комплексная огибающая

$$g(t) = i(t) + jq(t) = M(t)e^{j\varphi(t)}$$

Амплитуда $$M(t) = \sqrt{i^2(t) + q^2(t)}$$

Фаза $$\varphi = arctg\left(\frac{q\ (t)}{i\ (t)}\right)$$

Любой реальный полосовой сигнал представляет собой действительную часть комплексного сигнала

$$s(t) = \mathrm{Re}\left[g(t)e^{j\omega_0 t}\right]$$

Сигнал $g(t)$ является комплексным, с изменяющимися во времени амплитудой и фазой, причем изменение амплитуды сигнала $g(t)$ полностью совпадает с изменением амплитуды радиосигнала $s(t)$, а изменение фазы полностью совпадает с изменением фазы радиосигнала $s(t)$.

Отсутствие множителя $e^{j\omega_0 t}$ говорит о том что сигнал представляет собой «комплексный сигнал, перенесенный на нулевую частоту».

Комплексная огибающая сигнала существенно упрощает анализ сигнала.

Квадратурный модулятор

В общем виде передаваемая информационная последовательность разбивается на два потока.
Один поток представляет синфазную составляющую I_k
другой квадратурную Q_k .

Комплексная огибающая $$G_k = I_k + iQ_k$$

Процесс модуляции можно представить как умножение комплексной огибающей на $e^{j\omega_0 t}$, с последующей передачей действительной части.

$$\left(I_k + iQ_k\right)e^{j\omega_0 t} = \left(I_k + iQ_k\right)\left[\cos(\omega t) + j\sin(\omega t\right]$$

$$I_k \cos(\omega t) + iQ_k \cos(\omega t) + jI_k \sin(\omega t) + jiQ_k \sin(\omega t) =$$

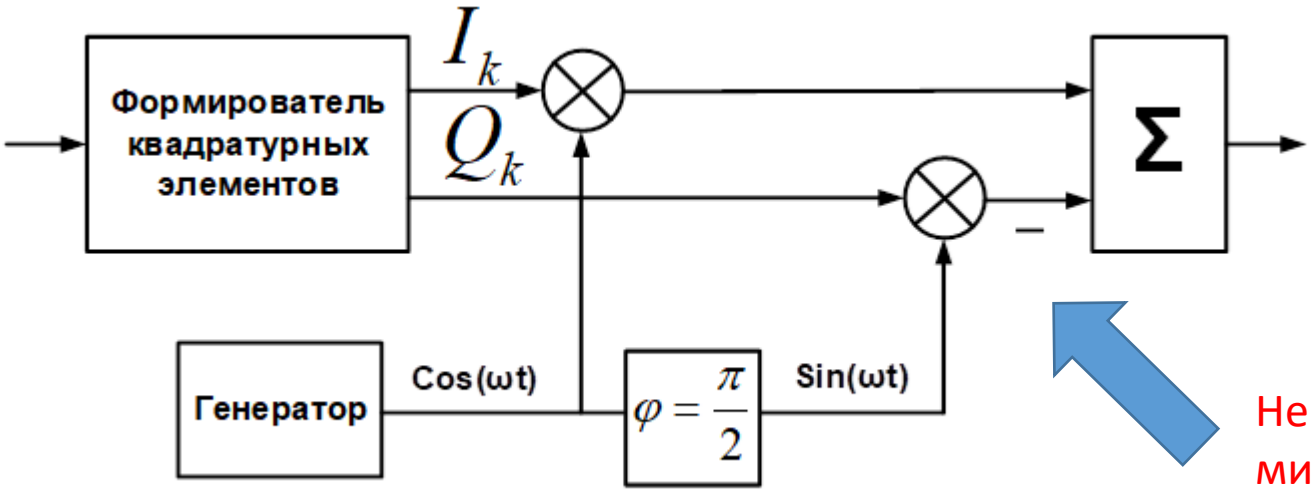
$$= I_k \cos(\omega t) + iQ_k \cos(\omega t) + jI_k \sin(\omega t) - Q_k \sin(\omega t) =$$

$$= I_k \cos(\omega t) - Q_k \sin(\omega t) + j\left(Q_k \cos(\omega t) + I_k \sin(\omega t)\right)$$

Реальная часть этого произведения будет

$$\mathrm{Re}\left[\left(I_k + iQ_k\right)e^{j\omega_0 t}\right] = I_k \cos(\omega t) - Q_k \sin(\omega t)$$

Таким образом, $I_k \cos(\omega t) - Q_k \sin(\omega t)$

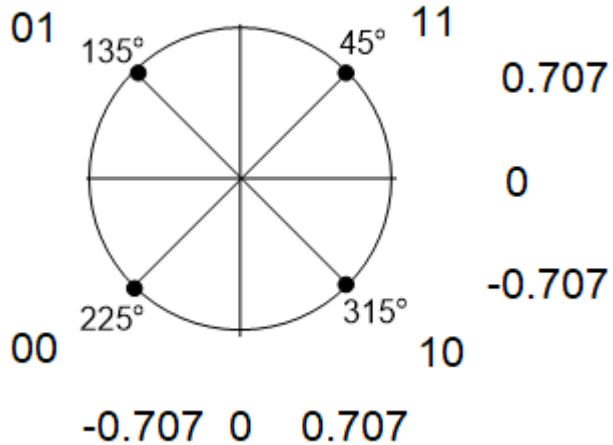


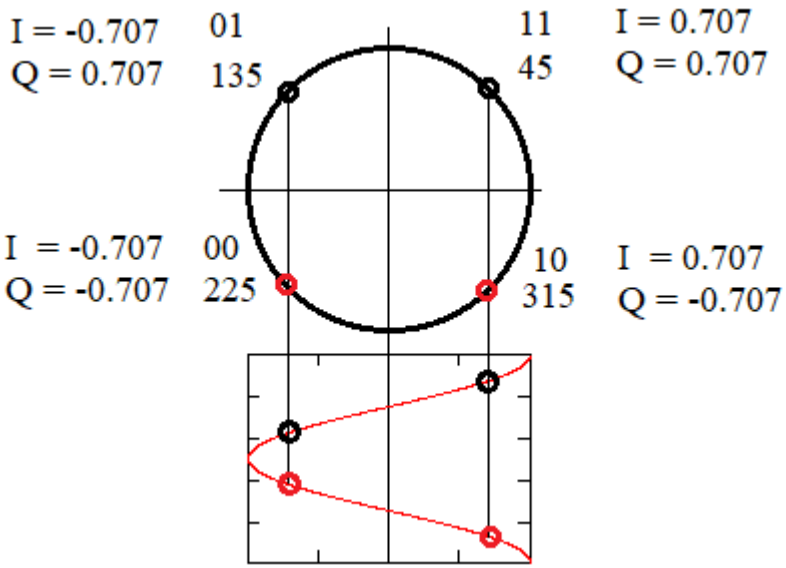
Не забывайте минус !!!

$$\cos(\omega t + \pi / 2) = -\sin(\omega t)$$

выбирая амплитуды квадратурных составляющих можно получить любую точку на фазовой плоскости, или заставить её двигаться произвольным образом. Данное свойство позволяет синтезировать универсальный IQ-модулятор, способный осуществлять любой вид манипуляции, посредством амплитудных модуляций квадратурных составляющих.

Созвездие QPSK, преобразование входного потока в квадратуры комплексной огибающей





$D^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	...

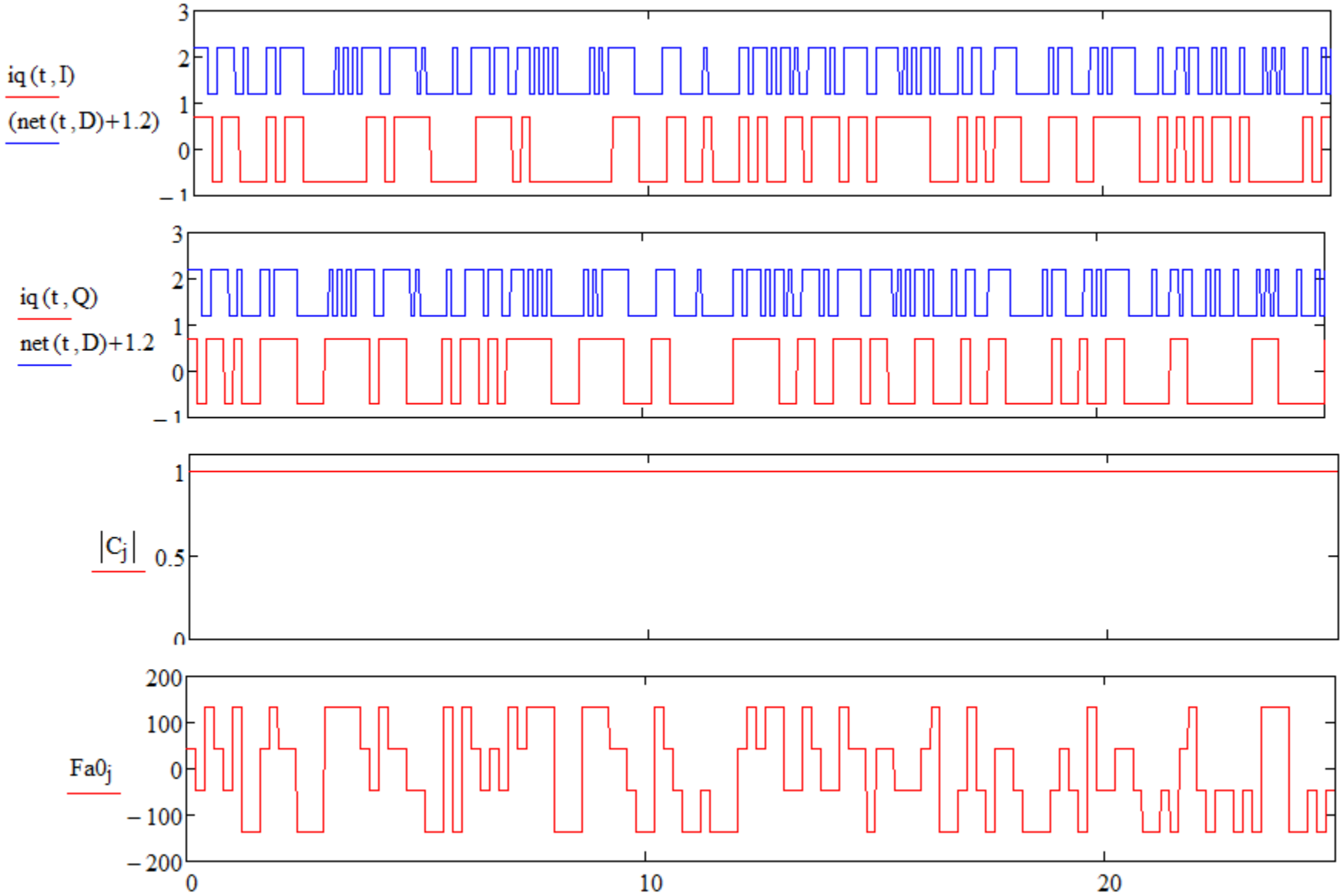
$I^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.707	0.707	-0.707	0.707	0.707	-0.707	-0.707	-0.707	0.707	...

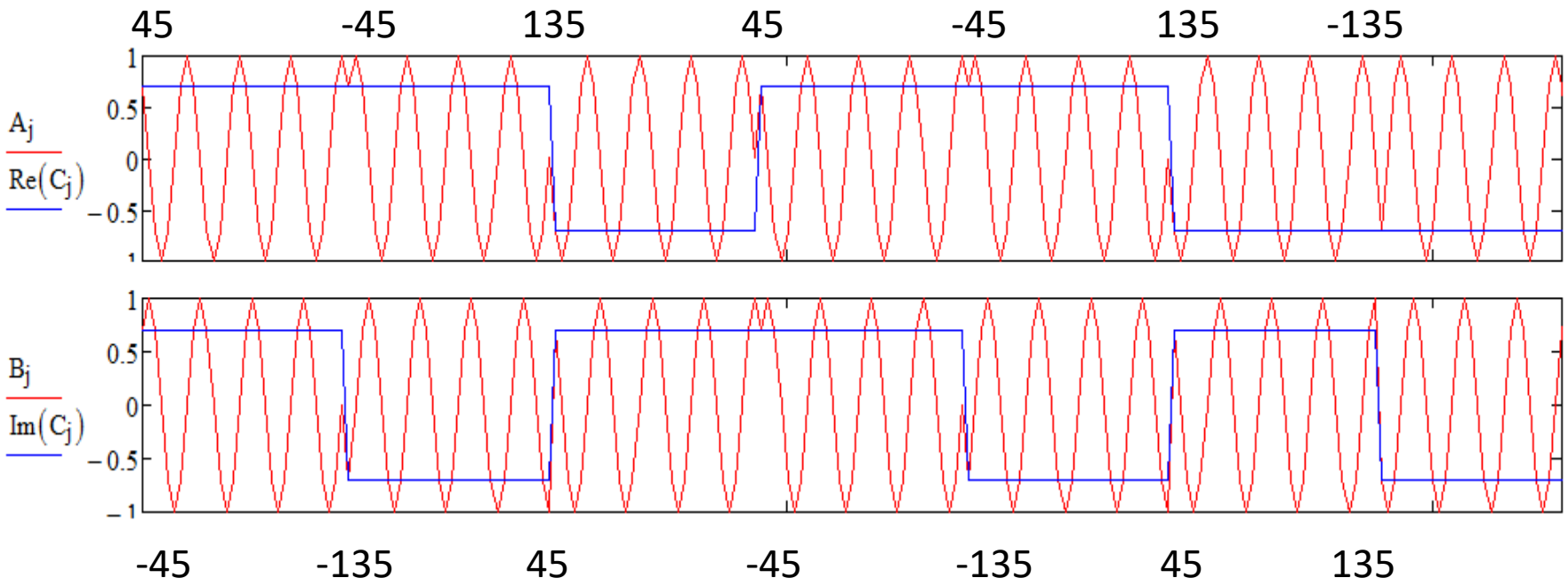
$Q^T =$

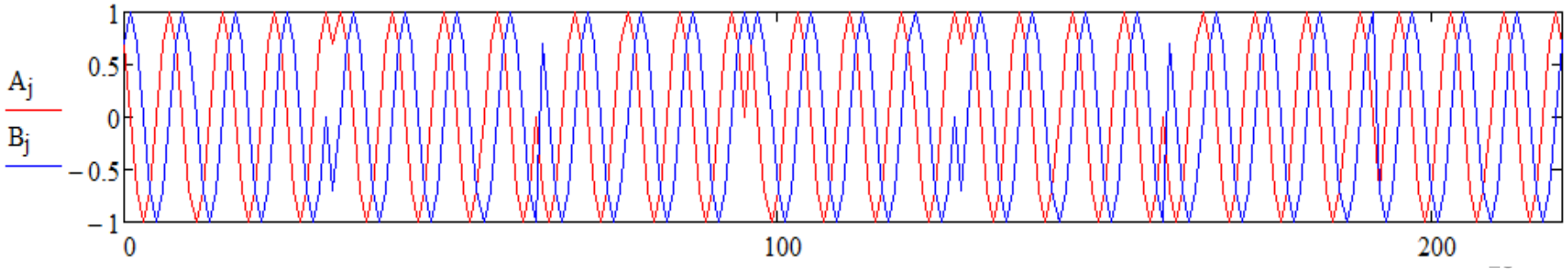
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.707	-0.707	0.707	0.707	-0.707	0.707	-0.707	-0.707	0.707	...

Информационная последовательность, синфазная и квадратурная составляющие, модуль и фаза комплексной огибающей QPSK

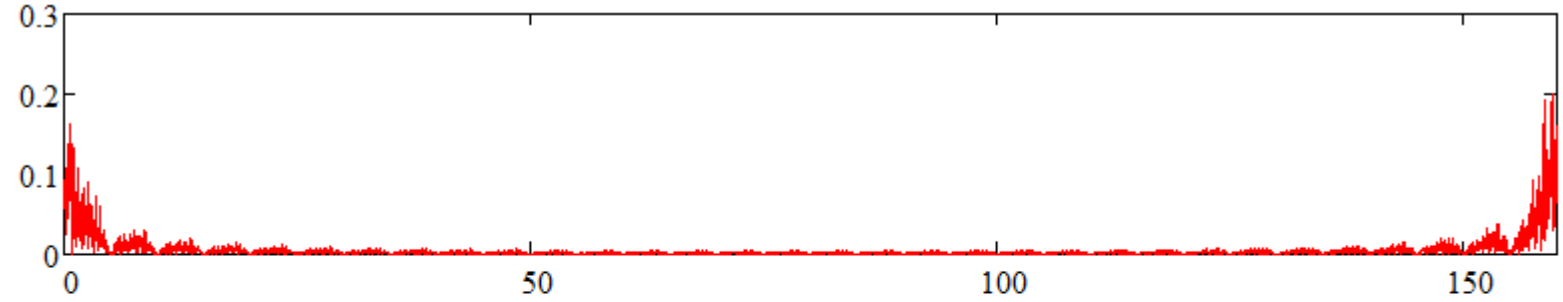


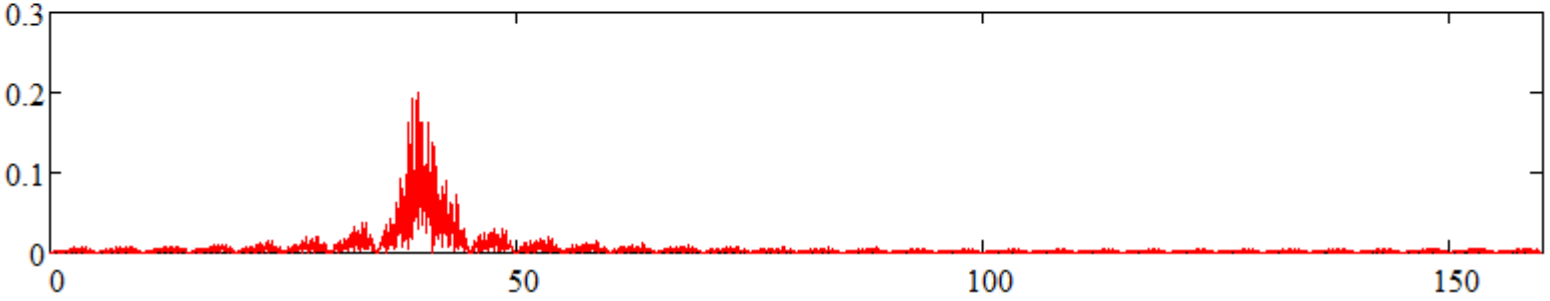
Квадратурные составляющие комплексного модулированного сигнала и комплексной огибающей



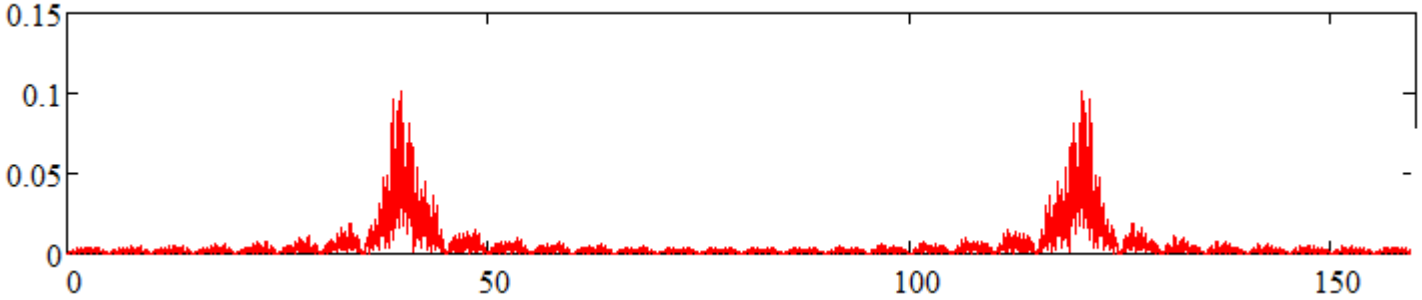


Спектр комплексной огибающей и комплексного сигнала после квадратурного смешивания с частотой 40 Гц

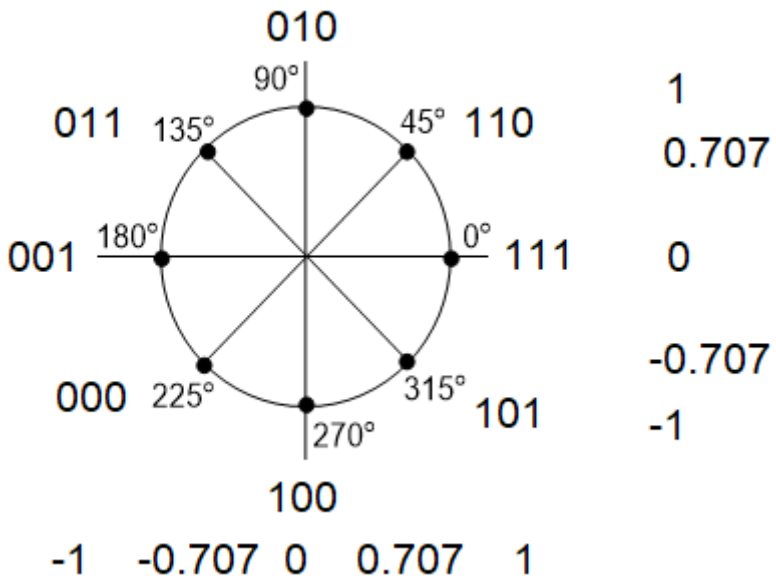




Спектр действительного модулированного сигнала, подлежащего передаче (без фильтрации)



Созвездие 8PSK, преобразование входного потока в квадратуры комплексной огибающей



180 90 -90 90 135 -135

$D^T =$

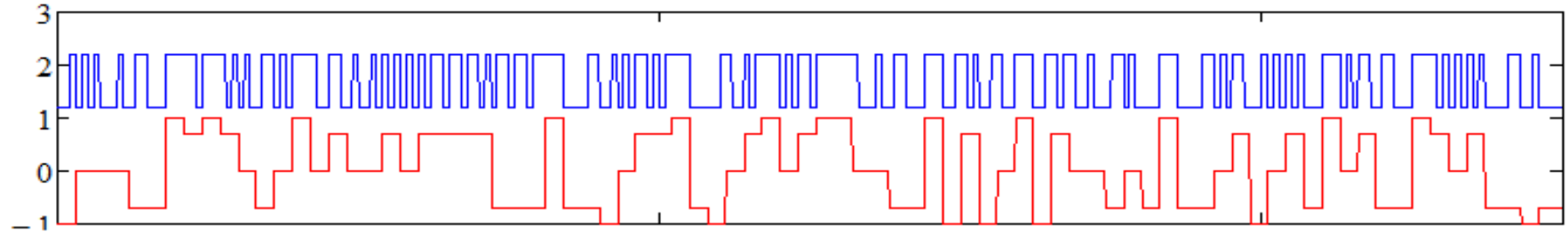
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	...

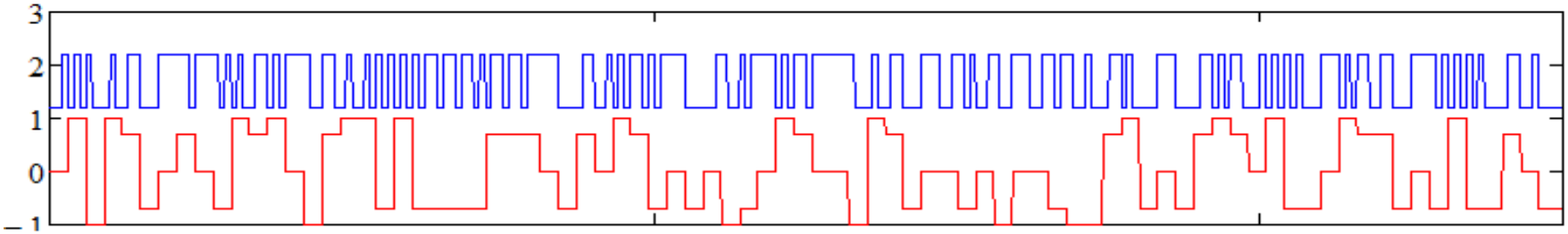
$I^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	-1	0	0	0	-0.707	-0.707	1	...

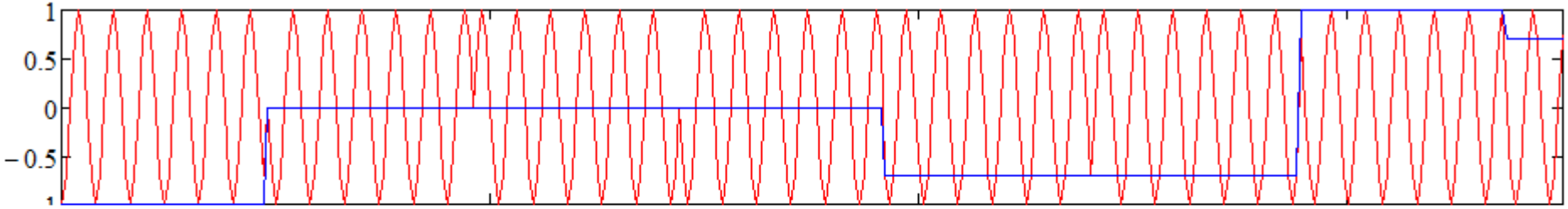
$Q^T =$

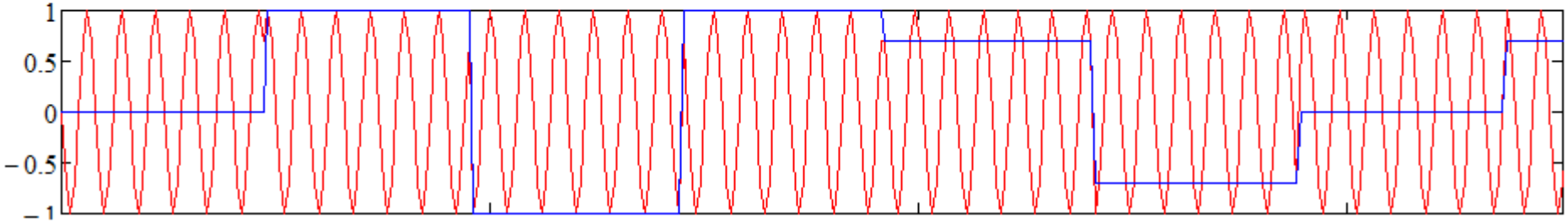
	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	-1	1	0.707	-0.707	0	...

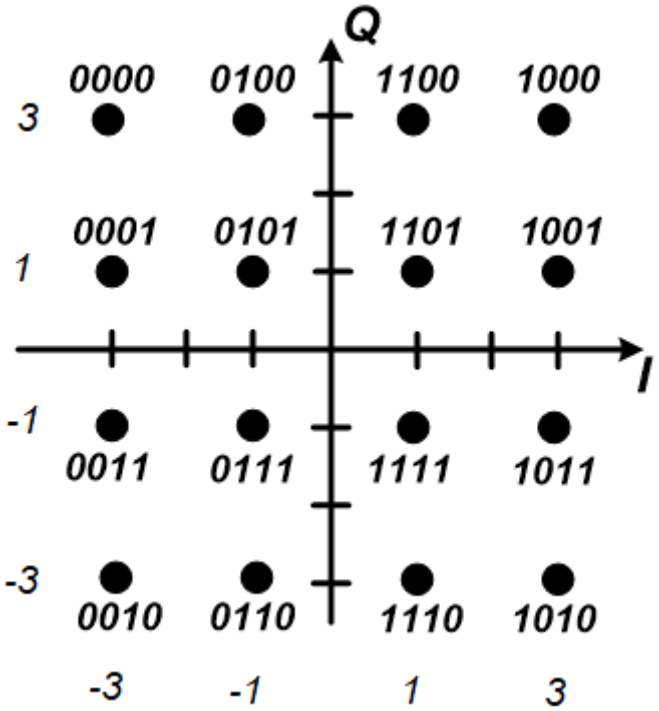




180 90 -90 90 135 -135

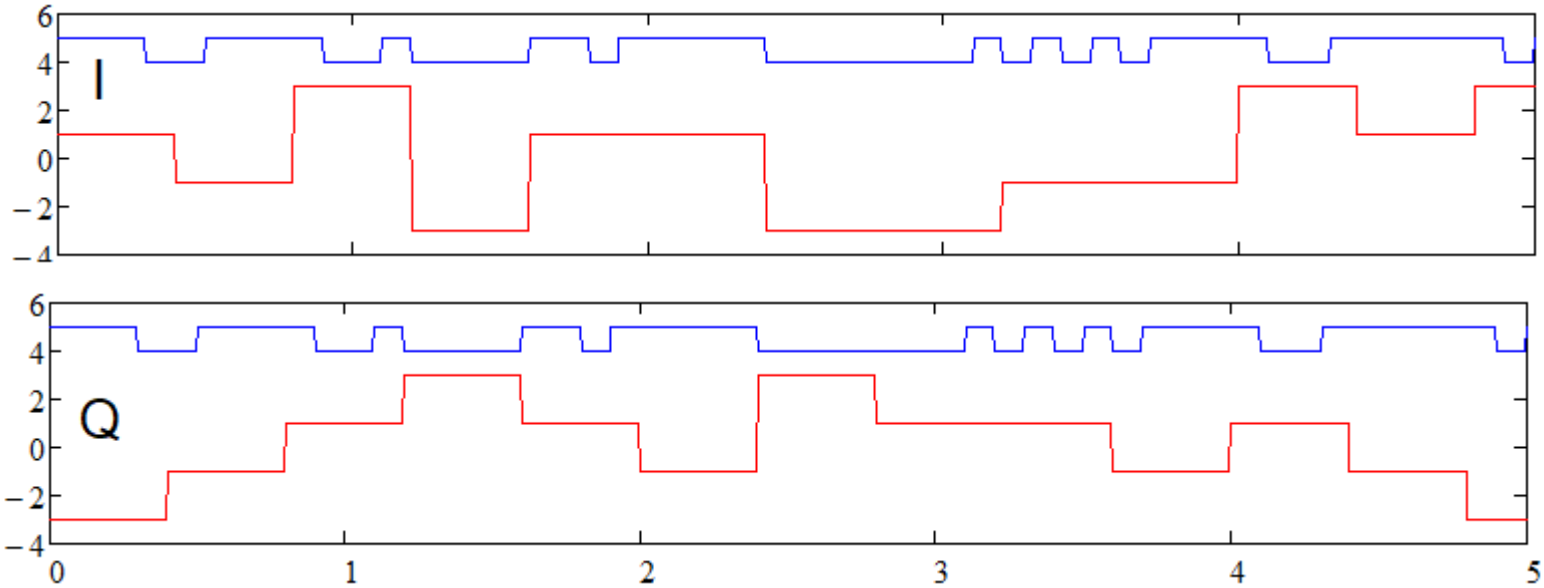
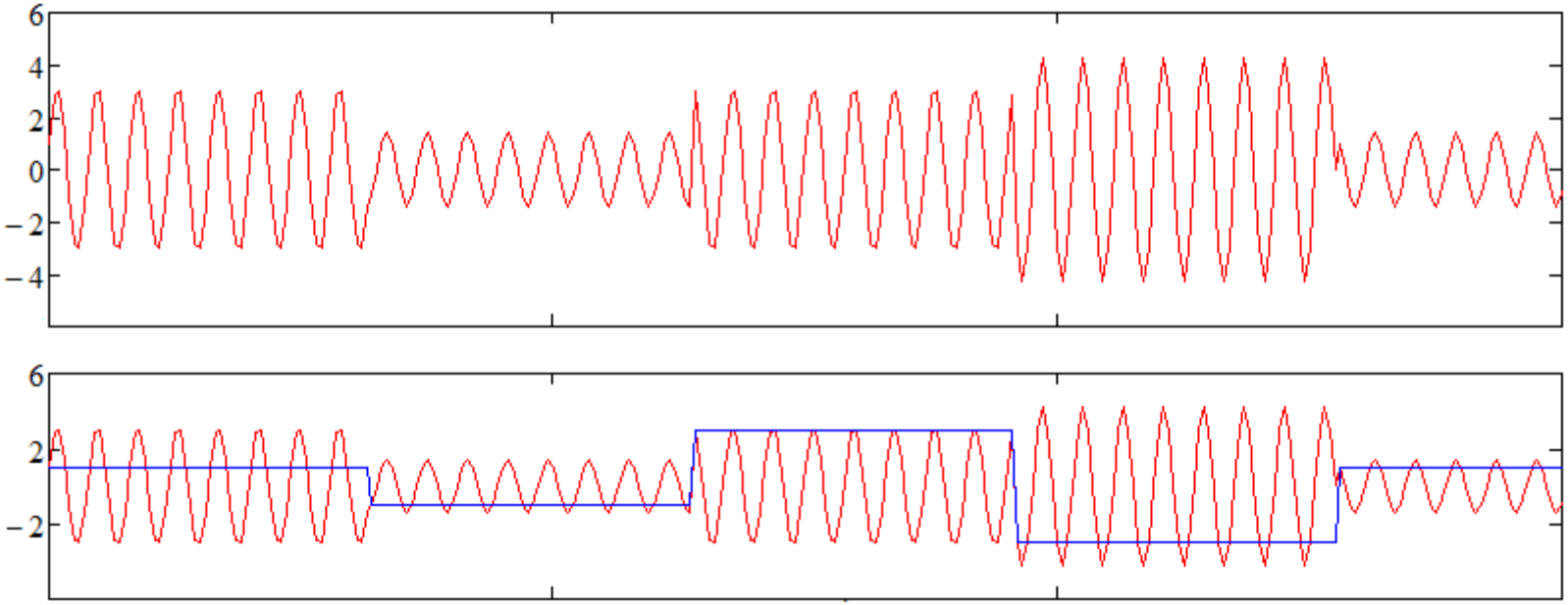






Квадратурная амплитудная модуляция QAM-16

	I	Q
1110	1	-3
0111	-1	-1
1001	3	1
0000	-3	3
1101	1	1
1111	1	-1



Квадратурная амплитудная модуляция QAM-16