

Федеральное агентство связи

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и

информатики»

(СибГУТИ)

Кафедра Передачи дискретных сообщений и метрологии (ПДСиМ)

Мелентьев О.Г.

Дискретное преобразование Фурье

Методические указания

к лабораторной работе

Новосибирск, 2019

Цель: Осуществить дискретизацию сигнала и выполнить дискретное преобразование Фурье.

1. Продискретизировать исходный сигнал. Провести дискретное преобразование Фурье (ДПФ) по формуле и с помощью встроенных функций Mathcad, построить графики спектров и сделать сравнения.

2. Исследовать эффект «утечки бинов» спектра.

Краткая теория

Дискретно-временное преобразование Фурье, позволяет рассчитать частотный спектр дискретизированного сигнала $S(t)$.

Пусть исходный дискретный сигнал $S(t)$ ограничен во времени и содержит N ненулевых отсчетов, взятых с интервалом дискретизации T_d . Тогда длительность дискретного сигнала равна $N \cdot T_d$ секунд, и $S(t)$ можно записать как:

$$s_d(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s(t) \delta(t - nT_d), \quad (1)$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака.

Известно, что дискретным спектром обладают периодические сигналы. При этом дискретный спектр получается путем разложения в ряд Фурье периодического сигнала. Значит, чтобы получить дискретный спектр, надо сделать исходный дискретный сигнал периодическим путем повторения данного сигнала во времени бесконечное количество раз с некоторым периодом P , кратным интервалу дискретизации T . Мы можем осуществить такое периодическое повторение сигнала (1), потому что его длительность конечна [2].

Графически процесс повторения сигнала во времени представлен на рисунке 1.

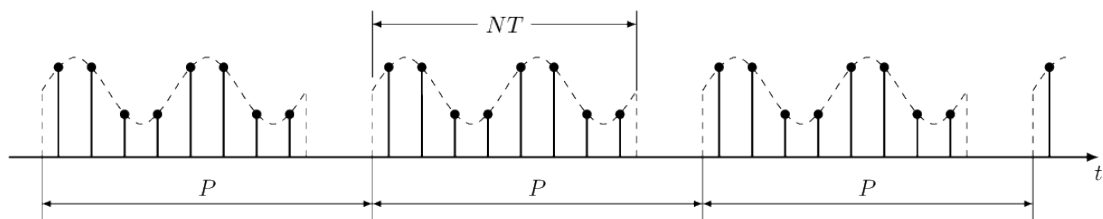


Рисунок 1- «Повторение сигнала во времени с периодом P »

Повторять сигнал можно с различным периодом P , однако необходимо, чтобы период повторения был больше или равен длительности сигнала $P \geq N \cdot T$, чтобы сигнал и его периодические повторения не перекрывались во времени.

При этом минимальный период повторения сигнала, при котором сигнал и его повторения не накладываются друг на друга, равен $P_{min} = NT$ секунд [2].

Повторение сигнала с минимальным периодом $P_{min} = NT$ секунд показано на рисунке 2.

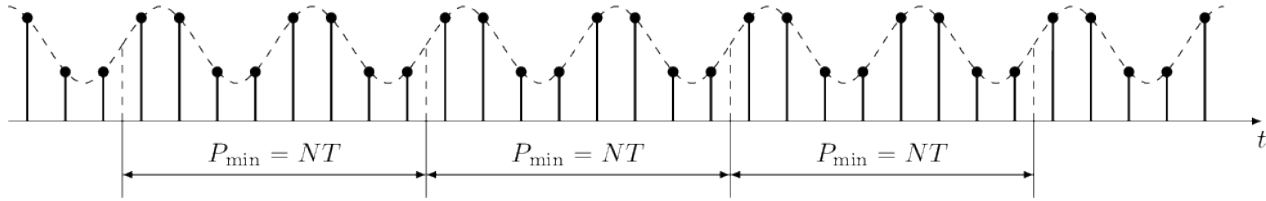


Рисунок 2 - «Повторение сигнала с минимальным периодом $P_{min} = NT$ »

Преобразование Фурье выглядит следующим образом:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt, \quad (2)$$

где $x(t)$ – некоторый непрерывный сигнал во временной области.

Формула ДПФ в экспоненциальной форме:

$$X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nm/N} \quad (3)$$

Формула ДПФ в тригонометрической форме:

Учитывая тождество Эйлера: $e^{-j\varphi} = \cos(\varphi) - j\sin(\varphi)$

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left[\cos\left(\frac{2\pi nm}{N}\right) - j\sin\left(\frac{2\pi nm}{N}\right) \right], \quad (4)$$

где $X(m)$ – m -ый частотный компонент ДПФ ($X(0)$, $X(1)$, $X(2)$ и т.д.);

m – индекс ДПФ в частотной области ($m=0, 1, 2, 3, \dots, N-1$);

$x(n)$ – последовательность входных отсчетов ($x(0)$, $x(1)$, $x(2)$ и т.д.);

n – временной индекс входных отсчетов ($n=0, 1, 2, 3, \dots, N-1$);

$j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица;

N – количество отсчетов входной последовательности и количество частотных отсчетов результата ДПФ.

Формула ОДПФ в тригонометрическом виде:

$$Y(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) \left[\cos\left(\frac{2\pi nm}{N}\right) - j\sin\left(\frac{2\pi nm}{N}\right) \right] \quad (5)$$

Количество входных отсчетов N и частота дискретизации Fd задают сетку аналитических частот $f_a(m) = \frac{mFd}{N}$. В случае, когда частота хотя бы одной из составляющих анализируемого сигнала не совпадает с одной из аналитических частот, происходит рассеивание энергии данной составляющей на все бины преобразования. Данное явление называется «утечка бинов». Спектр входного сигнала как бы «растекается» на все остальные бины.

Порядок выполнения работы:

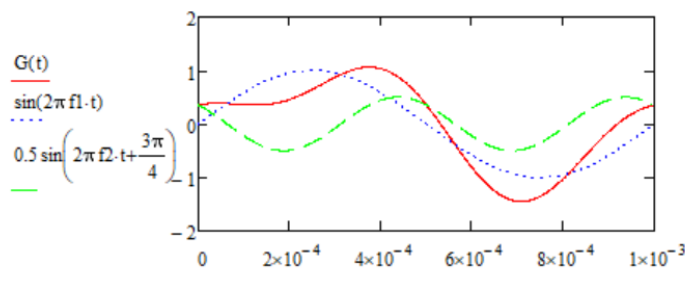
Задание 1

1. Задать параметры сигнала $G(t)$:
 - частотами $f_1=1000$ и $f_2=2000$ Гц;
 - частотой дискретизации $f_d=8000$;
 - количеством отсчетов $N=8$.

Непрерывная функция исходного сигнала имеет вид:

$$G(t) = \sin(2\pi * f_1 * t) + 0.5 \sin(2\pi * f_2 * t + \varphi),$$

где φ – фаза, равная $\frac{3\pi}{4}$.

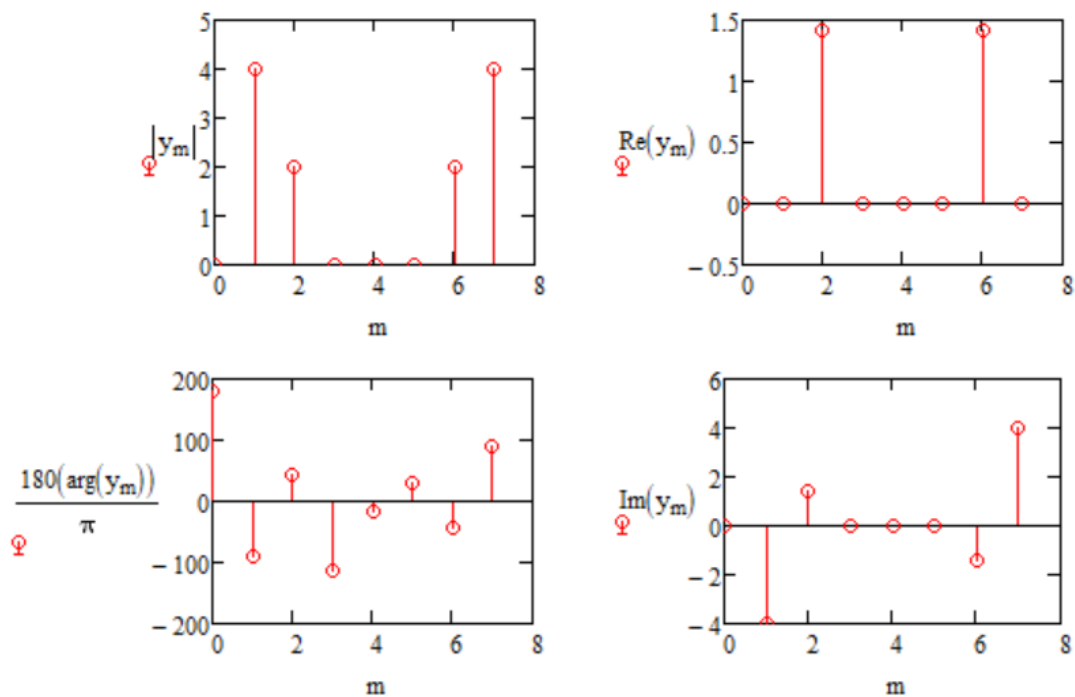


2. Написать функцию формирования отсчетов сигнала $G(t)$

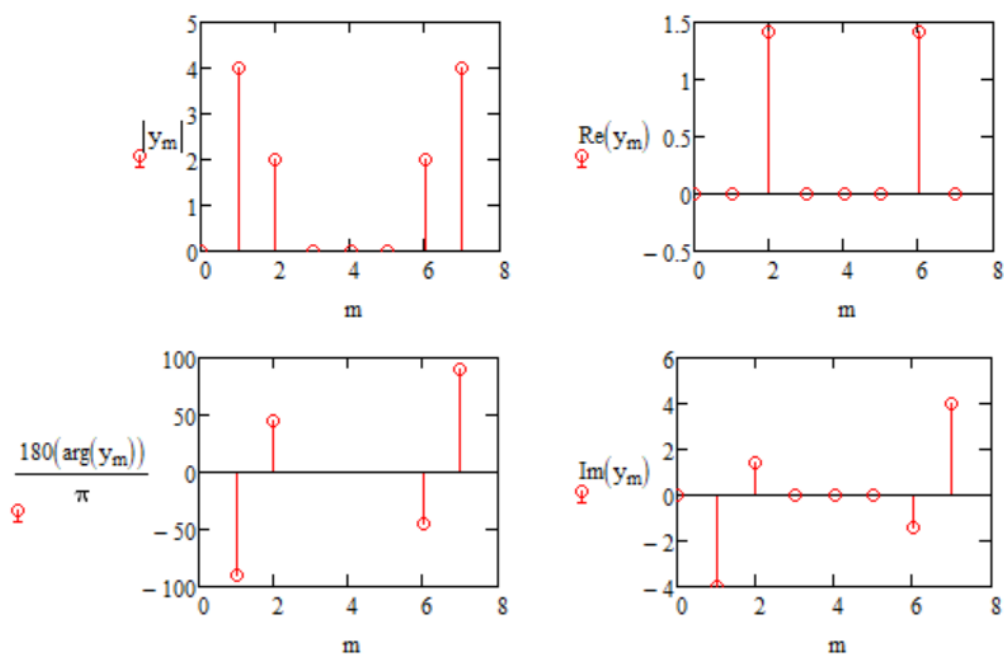
Для этого в новый массив записать значения функции $G(n \cdot T_d)$, где $n=0..N-1$.

3. Вывести массив сформированных отсчетов (для удобства - в транспонированном виде), записать функцию ДПФ в тригонометрической форме (4) и вывести массив результатов преобразования.

4. Вывести графики модулей, фаз, действительной и мнимой частей ДПФ. Сделать выводы по симметрии графиков.



5. Сравнить полученные графики с теоретическими. В случае несовпадения наложить дополнительное условие принудительного «зануления» элементов массива, меньших по модулю значения 10^{-14} .



6. Написать формулу ОДПФ (5). Вывести массив значений после ОДПФ. Сравнить массивы после ОДПФ и исходный.

7. Реализовать те же действия с использованием функций `CFFT()` и `ICFFT()`. Сравнить и сделать выводы.

Литература:

1. Лайонс, Р. Цифровая обработка сигналов: Второе издание. Пер. с англ. – М.: ООО «Бином-Пресс», 2006 г. – 656 с.: ил.
2. Дискретное преобразование Фурье [Электронный ресурс] // dsplib.org. – URL: <http://ru.dsplib.org/content/dft/dft.html> (дата обращения 20.10.2019)